Funções da Álgebra da Lógica Bivalente

Prof. Guilherme Tomaschewski Netto
guilherme.netto@gmail.com

Roteiro

- Álgebra e conjuntos
- Álgebra da Lógica bivalente
- Funções
- Funções Atômicas
- Variáveis essenciais e fictícias

Legendas

- Nesta apresentação serão utilizadas algumas legendas:

Indica uma referência, para quem ficou curioso e quer aprofundar mais seus conhecimentos sobre o assunto

Indica uma referência importante, leitura obrigatória.

Competências desejadas

Para compreênsão dos conceitos abordados é desejado que os alunos já tenham apropriado as seguintes competências:

- Conhecimentos gerais sobre a Lógica matemática
- Conhecimentos sobre teoria dos conjuntos

Funções da Algebra da Lógica Bivalente

"A álgebra, no sentido de um objeto matemático, é um conjunto no qual estão destacados alguns elementos e onde estão determinadas certas operações."

SIROTINSKAYA, S. & STRIEDER, A.J. 2008. pag. 49-50

Conjuntos

Noção intuitiva de conjunto e elemento

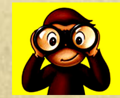
Conjuntos

A noção de conjunto, em Matemática, é praticamente a mesma utilizada na linguagem do dia-a-dia:

agrupamento, classe, colecção...

Por exemplo:

- Conjunto das letras do alfabeto;
- Conjunto dos dias da semana;
- Conjunto dos números inteiros;
- Conjunto dos números pares;



SCHEINNERMAN, E.2003. Páginas 49-52

Conjuntos

Noção intuitiva de conjunto e elemento

Elemento

Cada membro ou objecto que entra na formação do conjunto.

Assim:

- v, i, c - são elementos do primeiro conjunto;
- Sábado, domingo - são elementos do segundo conjunto;
- 7 e 23 – são elementos do terceiro conjunto;
- 6 e 22 - são elementos do quarto conjunto.

Conjuntos

Representação de conjuntos

REPRESENTAÇÃO EM EXTENSÃO – escrever dentro de chaves todos os elementos do conjunto separando-os por vírgulas.

A={0,1,2,3,4,5}

REPRESENTAÇÃO EM COMPREENSÃO – escrever dentro de chavetas uma propriedade que caracterize todos os elementos do conjunto.

A={números inteiros menores que 6}

Conjuntos

Representação de conjuntos

O conjunto dos números inteiros representa-se por IN0 → IN0 = {números inteiros} = {0,1,2,3,4,5,...}

O conjunto dos números naturais representa-se por IN → IN = {números naturais} = {1,2,3,4,5,...}

Nos dois conjuntos anteriores não é possível enumerar todos os seus elementos – designam-se por conjuntos infinitos

Nos conjuntos A={3,4,5,6} e B={44,46,47} é possível enumerar todos os seus elementos – designam-se por conjuntos finitos

Conjuntos

Relação de Pertença e Não Pertença

3 é elemento de A

3 faz parte de A

3 pertence a A

$3 \in A$

9 não é elemento de A

9 não faz parte de A

9 não pertence a A

$9 \notin A$

Considera o conjunto:

A={3,4,5,6,7,8}

Álgebra da Lógica Bivalente

Como uma disciplina:

"É a esfera da lógica matemática que considera um conjunto de dois elementos e que estuda as operações que representam, de modo formalizado, o processo de inferância das conclusões lógicas com base nas premissas iniciais."

SIROTINSKAYA, S. & STRIEDER, A.J. 2008.

Álgebra da Lógica Bivalente

Como um objeto matemático:

"É um conjunto de dois elementos no qual está definido um sistema de todas operações possíveis que podem ser aplicadas a esses elementos."

SIROTINSKAYA, S. & STRIEDER, A.J. 2008.

$$E_2 = \{ 1 , 0\}$$

Função da Álgebra da Lógica Bivalente

É a função $f(x_1, ..., x_n)$, onde os argumentos aceitam valores 1 e 0. E todos os arranjos dos valores dos argumentos também têm valor 1 ou 0.

Tabela para funções Lógicas de 3 variáveis (n = 3)

x_1	x_2	x_3	$f1(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Função da Álgebra da Lógica Bivalente

- $F(x_1, \ldots, x_n) = 1 \rightarrow$ arranjos de um
- $F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \rightarrow$ arranjos de zero

x_1	x_2	x_3	$f1(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Função da Álgebra da Lógica Bivalente

Disposição dos Arranjos binários nas tabelas de função

n	0			1			2			3			4			5			6			7	
x_3	0	0		1	1		2	0		3	1		4	0		5	1		6	0		7	1
x_2	0	0		0	0		1	1		1	1		2	0		2	0		3	1		3	1
x_1	0	0		0	0		0	0		0	0		1	1		1	1		1	1		1	1

x_1	x_2	x_3	$f1(x_1,x_2,x_3)$
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Função da Álgebra da Lógica Bivalente

n	0			1			2			3			4			5			6			7	
x_3	0	0		1	1		2	0		3	1		4	0		5	1		6	0		7	1
x_2	0	0		0	0		1	1		1	1		2	0		2	0		3	1		3	1
x_1	0	0		0	0		0	0		0	0		1	1		1	1		1	1		1	1

Função da Álgebra da Lógica Bivalente

Quantidade de funções de n variáveis

- Para n variáveis lógicas temos 2^n arranjos diferentes

  para cada variável temos 0 ou 1

- Quantas funções lógicas pode-se construir para n variáveis?

  para 2^n arranjos binários tem-se 2^{2^n} funções lógicas

Funções Atômicas

São as funções de uma variável e certas funções de duas variáveis. Têm estreita relação com as principais operações lógicas na álgebra das proposições.

Funções lógicas de uma variável:

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Φ_0 - Constante
Φ_1 – Função idêntica
Φ_2 – Negação
Φ_3 – Constante

SIROTINSKAYA, S. & STRIEDER, A.J. 2008. pag. 54-57

Funções Atômicas

As funções lógicas de duas variáveis são $16(2^{2^2})$.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Funções Atômicas

Conjunção ou produto lógico (e)

$x_1 \& x_2$ $\quad x_1 \wedge x_2$ $\quad x_1 \bullet x_2$ $\quad x_1x_2$

x_1	x_2	$f_1(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Funções Atômicas

Disjunção ou soma lógica (ou)

$x_1 \vee x_2$ $\qquad$ $x_1 + x_2$

x_1	x_2	$f_7(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Funções Atômicas

Adição (ou exclusivo)

$x_1 \oplus x_2$ $\quad$ $x_1 \neq x_2$ $\quad$ $x_1 \Delta x_2$

x_1	x_2	$f_6(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Funções Atômicas

Implicação ou consequência lógica (se x_1, então x_2)

$x_1 \rightarrow x_2$ $\quad$ $x_1 \supset x_2$

x_1	x_2	$f_{13}(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Funções Atômicas

Equivalência ou dupla implicação

$x_1 \sim x_2 \qquad x_1 \; \Xi \; x_2$

x_1	x_2	$f_9(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Funções Atômicas

Flecha de Peirce

$x_1 \downarrow x_2$

x_1	x_2	$f_8(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Funções Atômicas

Barra de Sheffer

$x_1 \mid x_2$

x_1	x_2	$f_{14}(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Variáveis essenciais e fictícias

Uma variável x_i na função $f(x_1,\ldots,x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\ldots, x_n)$ chama-se **fictícia** se:

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1}, 0, x_{i+1},\ldots, x_n) = f(x_1,\ldots,x_{i-1}, 1, x_{i+1},\ldots, x_n)$$

ou seja, a mudança no seu valor não altera o valor da função.

As demais variáveis que não são fictícias chamam-se **essenciais**

fictícia

x_1	x_2	$f_5(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Variáveis essenciais e fictícias

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0(x_1,x_2) = \phi_0(x_2) = \phi_0(x_1) = 0;$

ou seja, é igual a função de uma variável representada por 0.

Variáveis essenciais e fictícias

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_3(x_1,x_2) = \phi_1(x_1) = x_1$;

ou seja, é igual a função de uma variável representada por x1.

Variáveis essenciais e fictícias

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_5(x_1,x_2) = \phi_1(x_2) = x_2$;

ou seja, é igual a função de uma variável representada por x2.

Variáveis essenciais e fictícias

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_{10}(x_1,x_2) = \phi_2(x_2) = \neg x_2;$

ou seja, é igual a função de uma variável representada pela negação de x_2.

Variáveis essenciais e fictícias

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_{12}(x_1,x_2) = \phi_2(x_1) = \neg x_1;$

ou seja, é igual a função de uma variável representada pela negação de x_1.

Variáveis essenciais e fictícias

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_{15}(x_1,x_2) = \phi_3\,(x_2) = \phi_3\,(x_1) = 1;$

ou seja, é igual a função de uma variável representada por 1.

Variáveis essenciais e fictícias

Das 16 funções de duas variáveis, seis possuem variáveis fictícias e dependem somente de uma variável.

Verifica-se que das 4 funções de uma variável, duas ($\phi_0(x)$ e $\phi_0(x)$) são constantes e não possuem variáveis essenciais portanto dependem de um conjunto vazio de variáveis.

Bibliografia

GLUZ, J.C. 2003. Apostila da Diciplina de lógica para Computação. UERGS. Disponível por www em: http://www.gritee.com/participantes/jcgluz/notas-de-aula/apostila-log-comp-uergs.pdf.

SAMPAIO, L.S.C. 2001. A lógica da Diferença. Editora UFRJ, Rio de Janeiro(Brasil), 172p.

SIROTINSKAYA, S. & STRIEDER, A.J. 2008. Lógica matemática na integração de dados e na modelagem: elementos básicos. Editora UFRGS, Porto Alegre(Brasil), 281p.

SCHEINNERMAN, E.2003. Matemática Discreta: uma introdução. Editora Thompson, São Paulo, 525p.

Próxima aula

- Funções monótonas e incompletas
- Elementos da álgebra da lógica polivalente

that's all folks!