

Álgebra das Proposições

Prof. Guilherme Tomaschewski Netto
guilherme.netto@gmail.com



Roteiro

- Lógica Matemática clássica
- Proposições
- Valores lógicos
- Conectivos
- Fórmulas Lógicas
- Exemplos de aplicações

Legendas

- Nesta apresentação serão utilizadas algumas legendas:



Indica uma referência, para quem ficou curioso e quer aprofundar mais seus conhecimentos sobre o assunto



Indica uma referência importante, leitura obrigatória.

Competências desejadas

Para compreensão dos conceitos abordados é desejado que os alunos já tenham apropriado as seguintes competências:

- Conhecimentos gerais sobre a Lógica matemática
- Conhecimentos sobre teoria dos conjuntos

Lógica Matemática Clássica

- 1º Nível de Formalismo
Lógica Elementar das proposições(Álgebra da lógica, Álgebra das proposições e Cálculo das Proposições)
- 2º Nível de Formalismo
Lógica de predicados (Lógica de Predicados, Cálculo de predicados)
- 3º Nível de Formalismo
Cálculo Funcional generalizado(Metateorias dos cálculos lógicos)

Lógica Matemática Clássica

○ Proposições

Sentenças declarativas pertencentes a uma certa linguagem. São afirmações que pode receber os valores lógicos verdadeiro o falso apenas(propriedade da Bivalência)

- cachorro é um animal. - Verdadeiro
- $2 + 2 = 7$ - Falso

Sentenças interrogativas, exclamativas e imperativas não são proposições, pois não é possível dizer se são verdadeiras ou falsas.

Exemplos:

- Hoje está chovendo muito!
- Como foi a aula?
- Limpe a cozinha.
- Esta sentença não é verdadeira.

Lógica Matemática Clássica

- **Princípio da identidade** – se um enunciado é verdadeiro, essa é sua identidade.
- **A lei da não contradição** – duas proposições contraditórias não podem ser verdadeiras.
- **A lei do terceiro excluído** – ou é V ou F, exclui uma terceira possibilidade.
- **A lei da dupla negação** – a negação da negação é a afirmação

CONCEITO DE PROPOSIÇÃO

- Português
 - Exclamações, interrogações (formas de expressão)
 - Sentenças (fatos)
- Definição
 - **Proposição (ou sentença)** é todo o conjunto de palavras que exprimem um pensamento de sentido completo.
 - Proposições afirmam fatos ou exprimem juízos.

CONCEITO DE PROPOSIÇÃO

- São proposições:
 - a) A Lua é um satélite da Terra.
 - b) Recife é a capital de Pernambuco.
 - c) $\pi > \sqrt{5}$
 - d) $\sin \pi/2 = 1$

- Lógica Matemática
 - Princípio da não contradição
 - Princípio do terceiro excluído
 - Lógica bivalente

- As proposições a, b, c e d são todas **verdadeiras.**

CONCEITO DE PROPOSIÇÃO

- São **falsas** as proposições:
 - a) VASCO DA GAMA descobriu o Brasil.
 - b) DANTE escreveu os Lusíadas.
 - c) $3/5$ é um número inteiro.
 - d) O número Π é racional.
 - e) $\text{tg } \Pi/4 = 2$.

- Proposições são **verdadeiras** ou **falsas**.



CONCEITO DE PROPOSIÇÃO

- Considere as seguintes frases:
 - a) Dez é menor do que sete. **falsa**
 - b) Como vai você? **(?) interrogação**
 - c) Ela é muito talentosa. **ela não está especificada**
 - d) Existem formas de vida em outros planetas do universo. **verdadeira ou falsa**



VALORES LÓGICOS DAS PROPOSIÇÕES

- Definição
 - **Valor lógico** é a **verdade** e a **falsidade** de uma proposição.
- Princípio da não contradição e do terceiro excluído
 - **Toda a proposição tem um, e um só, dos valores V, F.**
- Exemplos
 - a) O mercúrio é mais pesado que a água. **(V)**
 - b) O Sol gira em torno da Terra. **(F)**

PROPOSIÇÕES SIMPLES E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

- Definição 1
 - **Proposição simples (ou atômica)** é aquela que não contém nenhuma proposição como parte integrante de si mesma.
 - Letras latinas minúsculas p , q , r , s , ... (letras proposicionais)
 - Exemplos:
 - p : Carlos é careca.
 - q : Pedro é estudante.
 - r : O número 25 é quadrado perfeito.

PROPOSIÇÕES SIMPLES E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

- Definição 2
 - **Proposição composta (ou molecular)** é aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.
 - Letras latinas maiúsculas P, Q, R, S, ... (letras proposicionais)
 - Exemplos:
 - P: Carlos é careca **e** Pedro é estudante.
 - Q: Carlos é careca **ou** Pedro é estudante.
 - R: **Se** Carlos é careca, **então** é infeliz.
 - Também chamadas **fórmulas proposicionais** ou apenas **fórmulas**.
 - P composta e p, q, r, ... simples
 - $P(p, q, r, \dots)$

Conectivos

- Definição
 - **Conectivos** são palavras usadas para formar novas proposições a partir de outras.
 - Exemplos:
 - P: O número 6 é par **e** o número 8 é cubo perfeito.
 - Q: O triângulo ABC é retângulo **ou** é isósceles.
 - R: **Não** está chovendo.
 - S: **Se** Jorge é engenheiro, **então** sabe Matemática.
 - T: O triângulo ABC é equilátero **se e somente se** é equiângulo.
 - “e” , “ou” , “não” , “se...então...” , “...se e somente se...” (Funções Atômicas)

Alfabeto da Lógica Proposicional

- O Alfabeto da Lógica proposicional é constituído de:
 - Símbolos de pontuação: (,)
 - Símbolos de verdade: V, F
 - Símbolos proposicionais: p, q, r,...
 - Conetivos proposicionais: \sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow

Sentença ou Fórmula

- Expressões construídas a partir dos símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional:
 - Símbolo de verdade (V) ou (F)

Exemplos:

1. A bola é redonda e a reta tem extremidade. ($p \wedge q$)
2. A bola é redonda ou a reta tem extremidade. ($p \vee q$)
3. Se a bola é redonda então a reta tem extremidade. ($p \rightarrow q$)
4. A bola é redonda se e somente se a reta tem extremidade. ($p \leftrightarrow q$)
5. A bola não é redonda. ($\sim p$)

Regras de Precedência

- Pode-se omitir sinais de pontuação desde que se use regras de precedência
- Regras de Precedência:
 - O conetivo \sim tem a maior precedência
 - Os conetivos \rightarrow e \leftrightarrow tem precedência intermediária
 - Os conetivos \wedge e \vee tem menor precedência

Exercícios

1. Sejam as proposições :

p : Joana é graciosa.

q : Fátima é tímida.

Dar as sentenças verbais para :

a) $p \rightarrow \sim q$

Se Joana é graciosa, então Fátima não é tímida.

b) $\sim(\sim p \vee q)$

É falso que Joana não é graciosa ou Fátima é tímida.

c) $p \wedge \sim q$

Joana é graciosa e Fátima não é tímida.

SÍMBOLOS AUXILIARES : () , parênteses que servem para denotar o "alcance" dos conectivos

Os parênteses serão usados segundo a seguinte ordem dos conectivos:

$\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

A TABELAS VERDADE

- **Princípio da Identidade:** Todo objeto é idêntico a si mesmo.
- **Princípio da Contradição:** Dadas duas proposições contraditórias (uma é negação da outra), uma delas é falsa.
- **Princípio do Terceiro Excluído:** Dadas duas proposições contraditórias, uma delas é verdadeira.

Com base nesses princípios as proposições simples são ou verdadeiras ou falsas - sendo mutuamente exclusivos os dois casos; daí dizer que a lógica clássica é bivalente.

Para determinar o valor (verdade ou falsidade) das proposições compostas, conhecidos os valores das proposições simples que as compõem usaremos tabelas-verdade :

Funções Atômicas

Conjunção ou produto lógico (e)

$x_1 \& x_2$ $x_1 \wedge x_2$ $x_1 \bullet x_2$ $x_1 x_2$

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Funções Atômicas

Disjunção ou soma lógica (ou)

$$x_1 \vee x_2 \quad x_1 + x_2$$

x_1	x_2	$f_7(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Funções Atômicas

Adição (ou exclusivo)

$$x_1 \oplus x_2$$

$$x_1 \neq x_2$$

$$x_1 \Delta x_2$$

x_1	x_2	$f_6(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Funções Atômicas

Implicação ou consequência lógica (se x_1 , então x_2)

$$x_1 \rightarrow x_2 \quad x_1 \supset x_2$$

x_1	x_2	$f_{13}(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Funções Atômicas

Equivalência ou dupla implicação

$$x_1 \sim x_2 \quad x_1 \equiv x_2$$

x_1	x_2	$f_9(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo: Construir a tabela verdade da fórmula: $((p \vee q) \rightarrow \sim p) \rightarrow (q \wedge p)$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \rightarrow \sim p$	$q \wedge p$	$((p \vee q) \rightarrow \sim p) \rightarrow (q \wedge p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F

EXERCÍCIOS

1. Determine o valor lógico das seguintes proposições compostas.

a) $3 > 1$ e $4 > 2$ **V**

b) $3 > 1$ ou $3 = 1$ **V**

c) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ou $2 + 6 = \sqrt{64}$ **V**

d) $\sqrt{(12 - 3)} > 3$ e $4 < 2$ **V**

2. Admitindo que p e q são verdadeiras e r é falsa, determine o valor lógico de cada proposição abaixo.

a) $p \rightarrow r$ **F**

b) $p \leftrightarrow q$ **V**

c) $r \rightarrow p$ **V**

d) $(p \vee r) \leftrightarrow q$ **V**

e) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ **F**

f) $p \rightarrow (q \wedge r)$ **F**

g) $\sim p \leftrightarrow \sim q$ **V**

h) $\sim p \leftrightarrow r$ **V**

i) $(r \wedge \sim p) \vee (\sim q \rightarrow \sim r)$ **V**

3. Sendo a proposição $p \rightarrow (r \vee s)$ falsa e a proposição $(q \wedge \sim s) \leftrightarrow p$ verdadeira, classifique em verdadeira ou falsa as afirmações p , q , r e s .

$p = V, q = V, r = F$ e $s = F$

NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA-VERDADE:

Cada proposição simples tem dois valores V ou F, que se excluem. Para n proposições distintas, há tantas possibilidades quantos são os arranjos com repetição de 2 (V e F) elementos n a n. Segue-se que o número de linhas da tabela verdade é 2^n . Assim, para duas proposições são $2^2 = 4$ linhas; para 3 proposições são $2^3 = 8$; etc.

Exemplo:

a tabela - verdade da fórmula $(p \wedge q) \rightarrow r$ terá 8 linhas como segue :

p	q	$(p \wedge q)$	r	$(p \wedge q) \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V
F	F	F	F	V

Lógica Proposicional e Computação

Expressões condicionais em programas

if $x > 2 \ \&\& \ y < 5$ then $z = 7$ else $z = 10$

while $x > 3 \ || \ y > 0$ do { $y := y - x; \ x := x - 1;$ }
return y ;

Lógica Proposicional e Computação

Busca em páginas WEB

- Buscando páginas que referenciam receitas de bolos ou tortas:

receita **and** (bolo **or** torta)

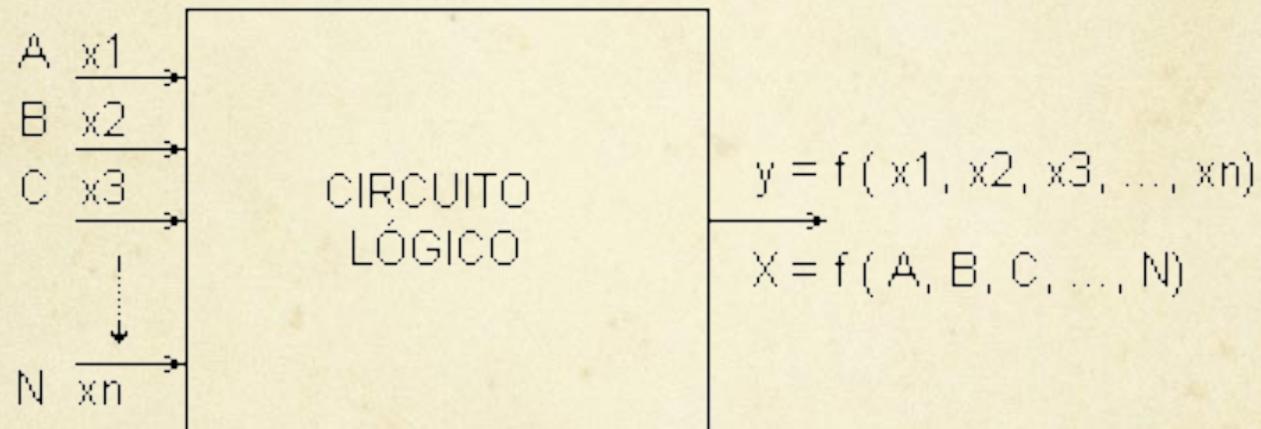
- Buscando receitas de bolo ou torta, exceto de chocolate:

receita **and** (bolo **or** torta) **and**
(**not** chocolate)

PORTAS LÓGICAS

- São dispositivos ou circuitos lógicos que operam um ou mais sinais lógicos de entrada para produzir uma (e somente uma) saída, a qual é dependente da função implementada no circuito.

PORTAS LÓGICAS

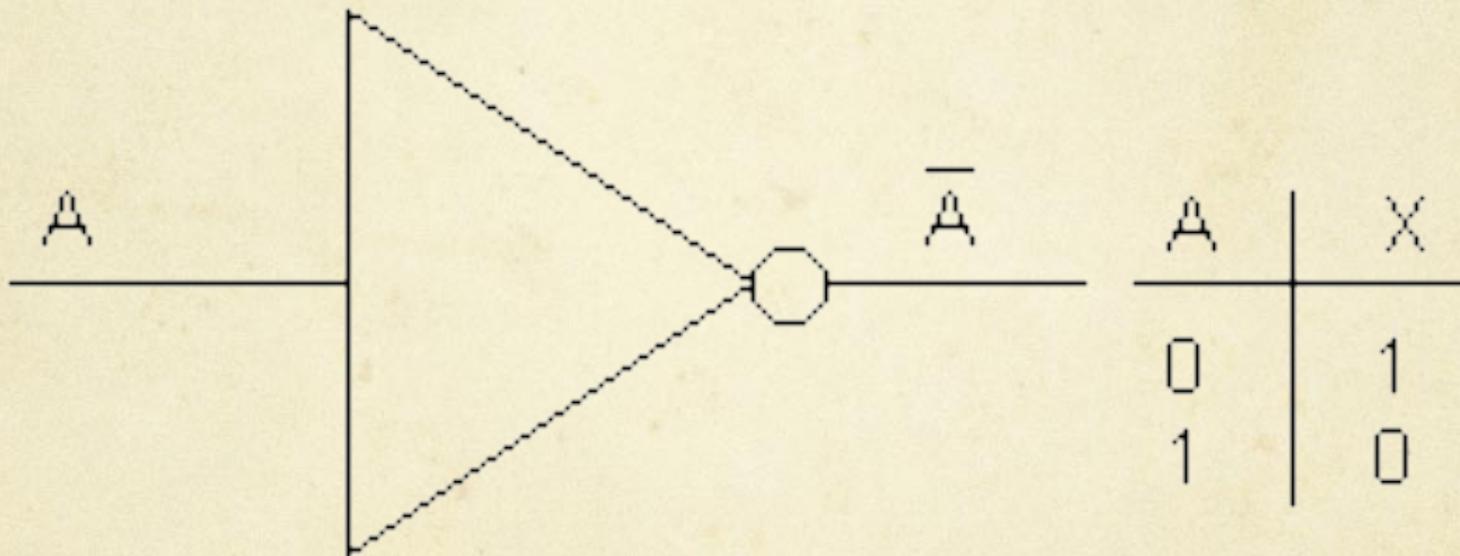


PORTA NÃO

- Inverte o sinal de entrada (executa a NEGAÇÃO do sinal de entrada), ou seja, se o sinal de entrada for 0 ela produz uma saída 1, se a entrada for 1 ela produz uma saída 0.

PORTA NÃO

PORTA NOT (NÃO) $A = \bar{A}$



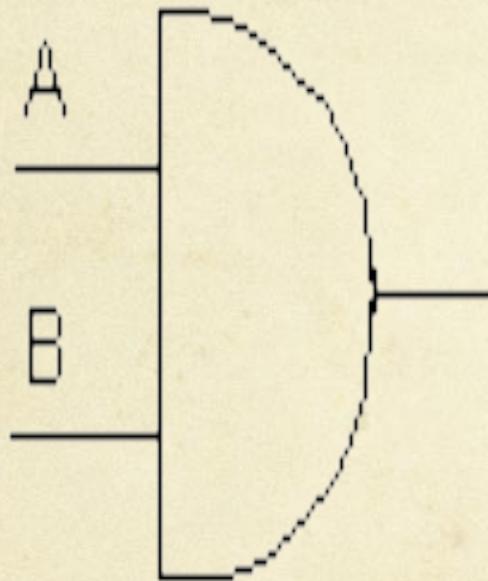
PORTA E

- Combina dois ou mais sinais de entrada de forma equivalente a um circuito em série, para produzir um único sinal de saída, ou seja, ela produz uma saída 1, se todos os sinais de entrada forem 1; caso qualquer um dos sinais de entrada for 0, a porta AND produzirá um sinal de saída igual a zero.

PORTA E

PORTA AND (E)

$$X = A \cdot B$$



A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

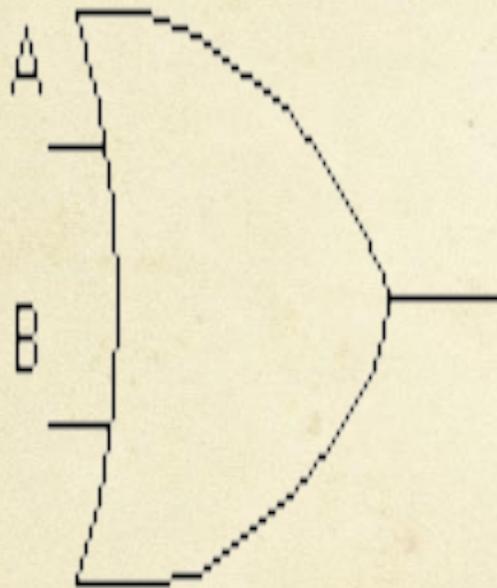
PORTA OU

- Combina dois ou mais sinais de entrada de forma equivalente a um circuito em paralelo, para produzir um único sinal de saída, ou seja, ela produz uma saída 1, se qualquer um dos sinais de entrada for igual a 1; a porta OR produzirá um sinal de saída igual a zero apenas se todos os sinais de entrada forem 0.

PORTA OU

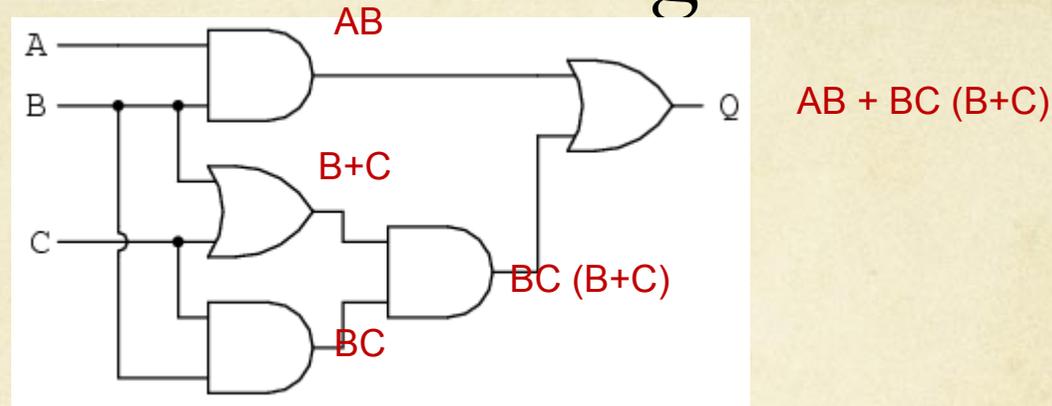
PORTA OR (OU)

$$X = A + B$$



A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Lógica e Circuitos Digitais



- O circuito lógico acima tem 3 entradas: A, B e C
- Cada entrada tem um sinal: 0 ou 1 (F ou T)
- Cada porta lógica implementa uma função lógica
- Qual é a fórmula lógica correspondente à saída Q ?
- Qual é o valor da saída Q , em função de A, B e C ?

Exercícios

○ 01. Sendo p a proposição João é gaúcho e q a proposição Roberto é paraense, traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

- a) $\sim q$
- b) $p \wedge q$
- c) $p \vee q$
- d) $p \rightarrow q$
- e) $p \rightarrow (\sim q)$

02. Sendo p a proposição Roberto fala inglês e q a proposição Ricardo fala italiano traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

- a) Roberto fala inglês e Ricardo fala italiano.
- b) Ou Roberto não fala inglês ou Ricardo fala italiano.
- c) Se Ricardo fala italiano então Roberto fala inglês.
- d) Roberto não fala inglês e Ricardo não fala italiano.

Bibliografia

SAMPAIO, L.S.C. 2001. A lógica da Diferença. Editora UFRJ, Rio de Janeiro(Brasil), 172p.

SIROTINSKAYA, S. & STRIEDER, A.J. 2008. Lógica matemática na integração de dados e na modelagem: elementos básicos. Editora UFRGS, Porto Alegre(Brasil), 281p.

GLUZ, J.C. 2003. Apostila da Dsiciplina de lógica para Computação. UERGS. Disponível por www em: <http://www.gritee.com/participantes/jcgluz/notas-de-aula/apostila-log-comp-uergs.pdf>.

Próxima Aula

- Introdução Lógica de predicados

“that's all folks!”

