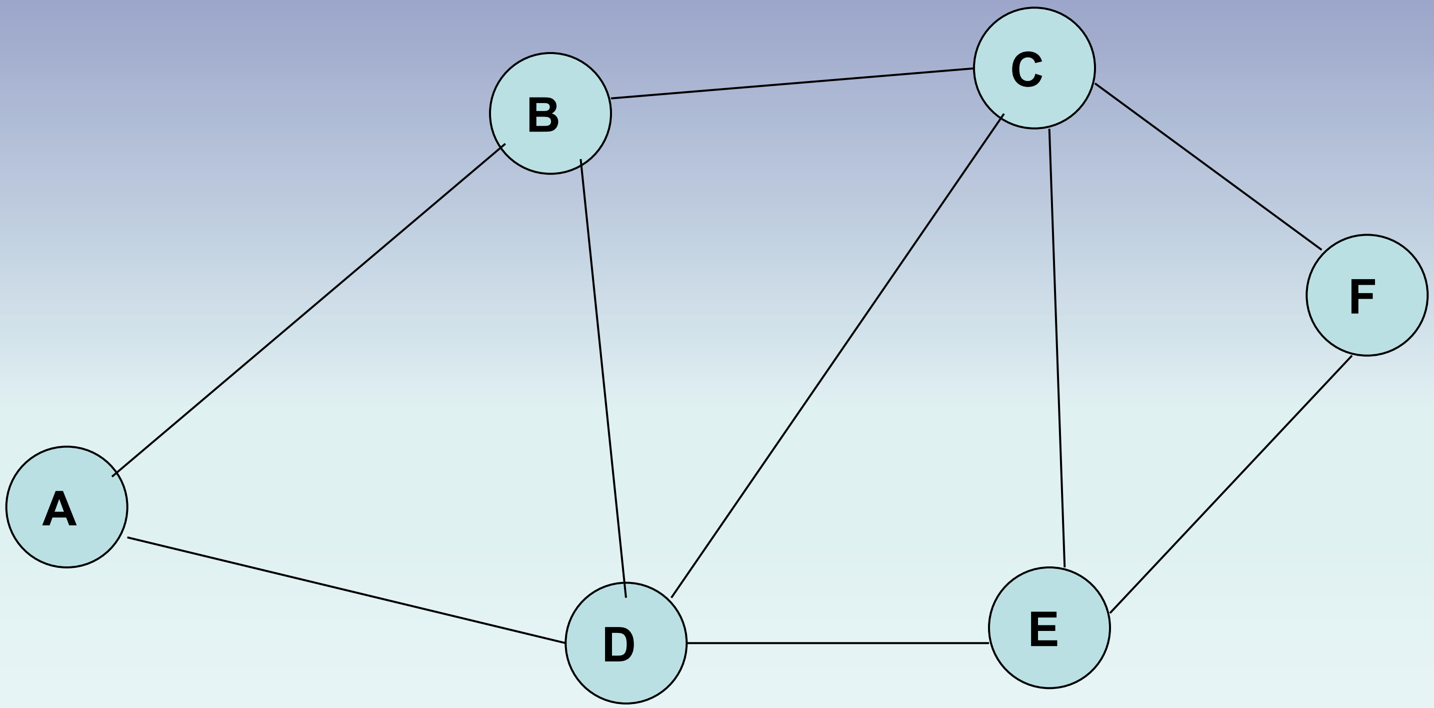
Problema do menor Caminho

Um sistema de BIKE-Entrega tem como foco a otimização dos recursos de mobilidade, logo o cálculo das distâncias entre os pontos de entrega é muito importante.



PROBLEMA DO MENOR CAMINHO

- **Problema:**
  - Obter *Caminhos* interligando *Vértices* de um Grafo, cujo comprimento (*Custo*) seja *Mínimo*.

- **Implementações:**
  - Algoritmo de Dijkstra

- **Aplicação:**
  - Redes de Computadores (*Percurso entre Roteadores*)
  - Tráfego Urbano.
  - Sistemas Rodoviários, Ferroviários e Aéreos,
  - Importante para vários outros problemas

Algoritmo de Dijikstra

- Problema dos caminhos mais curtos de origem (fonte) única: para um dado vértice, chamado fonte, em um grafo ponderado conectado, encontrar os caminhos mais curtos a todos os outros vértices
- Algoritmo de Dijkstra: melhor algoritmo conhecido aplicado a grafos com pesos não negativos

- Encontra os caminhos mais curtos de acordo com a distância a uma dada fonte
- Primeiro,encontra o caminho mais curto da fonte ao vértice mais próximo e assim por diante.
- Em geral, antes da i-ésima iteração iniciar, o algoritmo já encontrou os menores caminhos para os outros i-1 vértices próximos da fonte

- Estes vértices, a fonte, e as arestas dos caminhos mais curtos formam uma subárvore Ti.
- Como todos os pesos das arestas são não negativos, o vértice seguinte mais próximo da fonte pode ser encontrado dentre os vértices adjacentes aos vértices de Ti.
- Para identificar o i-ésimo vértice mais próximo, o algoritmo calcula, para cada vértice candidato u, a soma da distância ao vértice da árvore v mais próximo e o comprimento dv do caminho mais curto da fonte à v e então seleciona o vértice cuja soma seja a menor.

- Cada vértice possui duas etiquetas:
- Um valor numérico d que indica o comprimento do caminho mais curto da fonte ao vértice encontrado pelo algoritmo até o momento. Quando um vértice for adicionado a árvore, d indica o comprimento do caminho mais curto da fonte até o vértice.
- A outra etiqueta indica o nome do próximo ao último vértice neste caminho, i.e., o pai do vértice na árvore sendo construída.

- Com estas etiquetas, encontrar o vértice mais próximo u* seguinte torna-se uma tarefa simples que consiste em encontrar o vértice candidato com o menor valor de d.

- Após identificado o vértice u* a ser adicionado a árvore, as seguintes operações devem ser realizadas:

- Mover o vértice u* do vértice candidato para o conjunto dos vértices da árvore

- Para cada vértice candidato remanescente u que estiver conectado a u* por uma aresta de pesos(u*,u) tal que du* + w(u*,u) < dw, atualize as etiquetas de u por u* e du* + w(u*,u) respectivamente.
- Dijkstra compara comprimento de caminhos

Algoritmo de Dijkstra

- topologia da rede, custos dos enlaces conhecidos por todos os nós
  - realizado através de “difusão do estado dos enlaces”
  - todos os nós têm mesma info.
- calcula caminhos de menor custo de um nó (“origem”) para todos os demais
  - gera tabela de rotas para aquele nó
- iterativo: depois de k iterações, sabemos menor custo p/ k destinos

Notação:

- c(i,j): custo do enlace do nó i ao nó j. custo é infinito se não forem vizinhos diretos
- D(V): valor corrente do custo do caminho da origem ao destino V
- p(V): nó antecessor no caminho da origem ao nó V
- N: conjunto de nós cujo caminho de menor custo já foi determinado

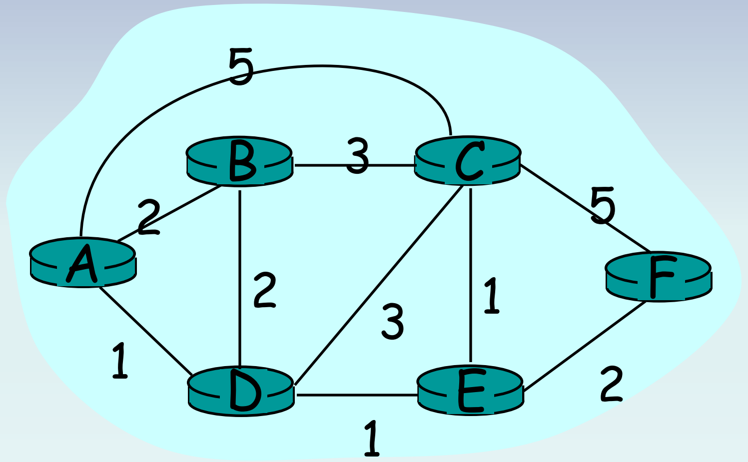
O algoritmo de Dijkstra

Inicialização:
N = {A}
para todos os nós V
  se V for adjacente ao nó A
    então D(V) = c(A,V)
    senão D(V) = infinito

Repete
determina W não contido em N tal que D(W) é o mínimo
adiciona W ao conjunto N
atualiza D(V) para todo V adjacente ao nó W e ainda não em N:
    D(V) = min(D(V), D(W) + c(W,V))
/* novo custo ao nó V ou é o custo velho a V ou o custo do
menor caminho ao nó W, mais o custo de W a V */
até que todos nós estejam em N

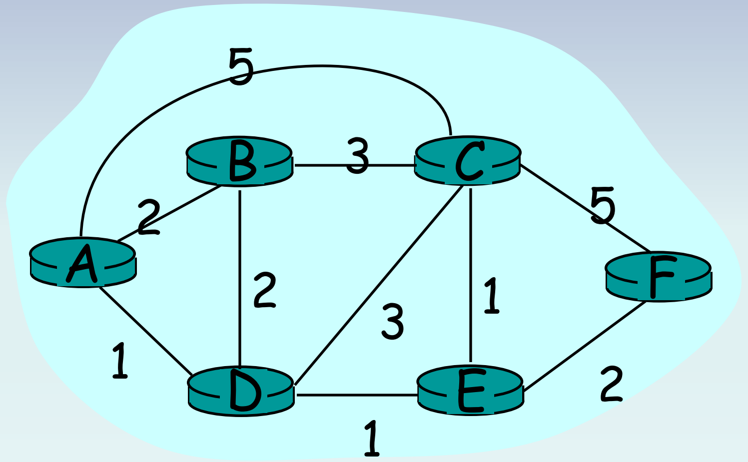
Algoritmo de Dijkstra: exemplo

Passo	N inicial	D(B),p(B)	D(C),p(C)	D(D),p(D)	D(E),p(E)	D(F),p(F)
0	A	2,A	5,A	1,A	infinito	infinito



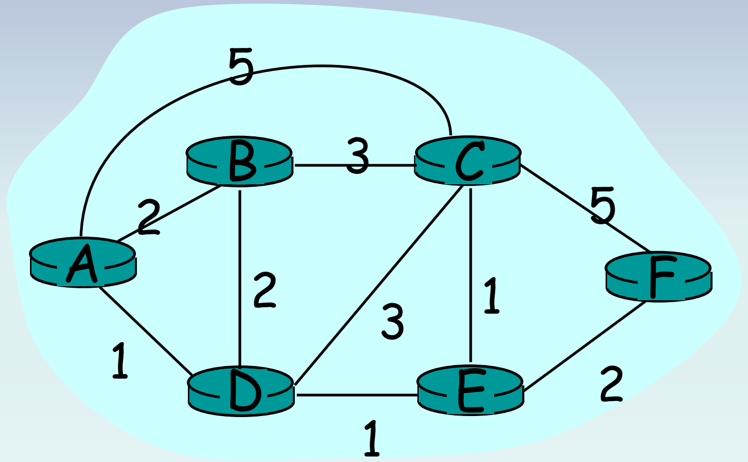
Algoritmo de Dijkstra: exemplo

Passo	N inicial	D(B),p(B)	D(C),p(C)	D(D),p(D)	D(E),p(E)	D(F),p(F)
0	A	2,A	5,A	1,A	infinito	infinito
1	AD	2,A	4,D		2,D	infinito



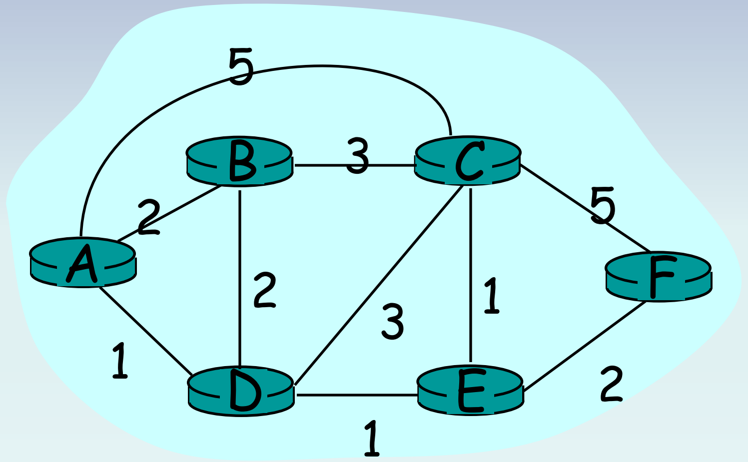
Algoritmo de Dijkstra: exemplo

Passo	N inicial	D(B),p(B)	D(C),p(C)	D(D),p(D)	D(E),p(E)	D(F),p(F)
0	A	2,A	5,A	1,A	infinito	infinito
1	AD	2,A	4,D		2,D	infinito
2	ADE	2,A	3,E			4,E



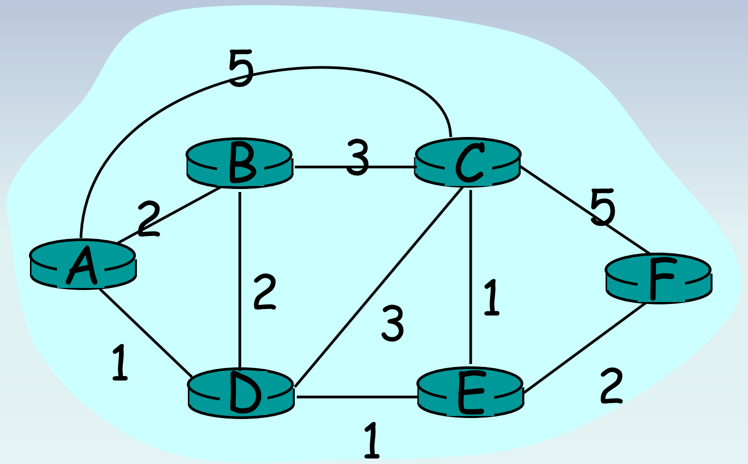
Algoritmo de Dijkstra: exemplo

Passo	N inicial	D(B),p(B)	D(C),p(C)	D(D),p(D)	D(E),p(E)	D(F),p(F)
0	A	2,A	5,A	1,A	infinito	infinito
1	AD	2,A	4,D		2,D	infinito
2	ADE	2,A	3,E			4,E
3	ADEB		3,E			4,E



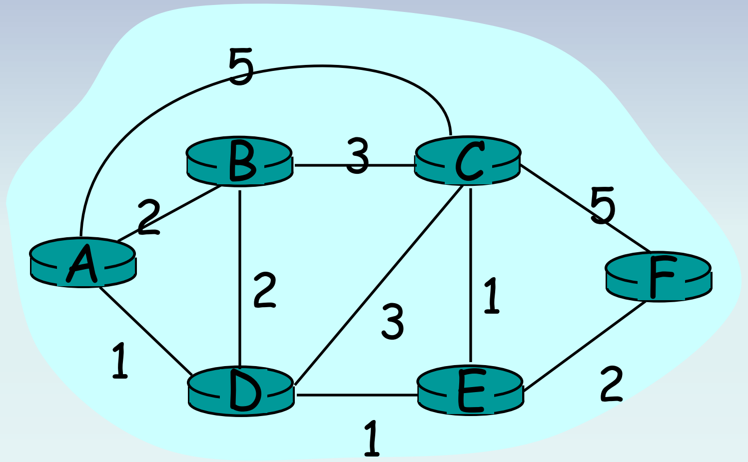
Algoritmo de Dijkstra: exemplo

Passo	N inicial	D(B),p(B)	D(C),p(C)	D(D),p(D)	D(E),p(E)	D(F),p(F)
0	A	2,A	5,A	1,A	infinito	infinito
1	AD	2,A	4,D		2,D	infinito
2	ADE	2,A	3,E			4,E
3	ADEB		3,E			4,E
4	ADEBC					4,E



Algoritmo de Dijkstra: exemplo

Passo	N inicial	D(B),p(B)	D(C),p(C)	D(D),p(D)	D(E),p(E)	D(F),p(F)
0	A	2,A	5,A	1,A	infinito	infinito
1	AD	2,A	4,D		2,D	infinito
2	ADE	2,A	3,E			4,E
3	ADEB		3,E			4,E
4	ADEBC					4,E
5	ADEBCF					



Trabalho

Implementar um programa C para calcular os caminhos mínimos entre os vértices de um Grafo utilizando o algorítmo de Dijsktra.

1. Permitir o armazenamento de até 20 vértices
2. Fazer a leitura dos pesos das arestas de cada vértice
3. Considerar sempre vértices positivos
4. Mostrar o caminho mínimo entre dois vértices solicitados

Bibliografia

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Dijkstra
- http://www.inf.ufsc.br/grafos/temas/custo-minimo/dijkstra.html
- http://www.ime.usp.br/~pf/mac0338-1999/aulas/dijkstra.htm
- http://w3.ualg.pt/~vfreitas/RedesII/DA.html
- CORMEN,T.H.; LEISERSON, C.E. and RIVEST, R.L. Introduction to Algorithms. Cambridge: MIT Press, 1996.