ÍNDICES- ÁRVORES B

ÁRVORES

- Por quê?
    - Quando não conseguimos trabalhar na memória principal (ou primária), temos que usar a memória secundária...
    - Sabemos que o acesso aos dados em memória secundária é muito lento.
    - Precisamos de meios eficientes de acesso aos dados (provavelmente na forma de "índices")

ÁRVORES

- Assuma que um disco gire a 3600 RPM
- Em 1 minuto faz 3.600 rotações, portanto uma rotação leva 1/60 de segundo, ou 16.7ms
- Na média cada acesso gastaria 8ms
- Parece ok até nos darmos conta que 120 acessos a disco consomem um segundo – o mesmo que 25 millhões de instruções
- Ou seja, um acesso a disco é equivalente a 200.000 instruções

ÁRVORES

- Para árvores balanceadas com n itens, as operações na árvore (inserção etc) são *O(log n)* porque a altura da árvore é aproximadamente *log n*.

Exemplos:

binary tree c/ 1000 itens:

h ~= $\log_2$ 1000 ~= 10

10-ary tree c/ 1000 itens:

h ~= $\log_{10}$ 1000 ~= 3

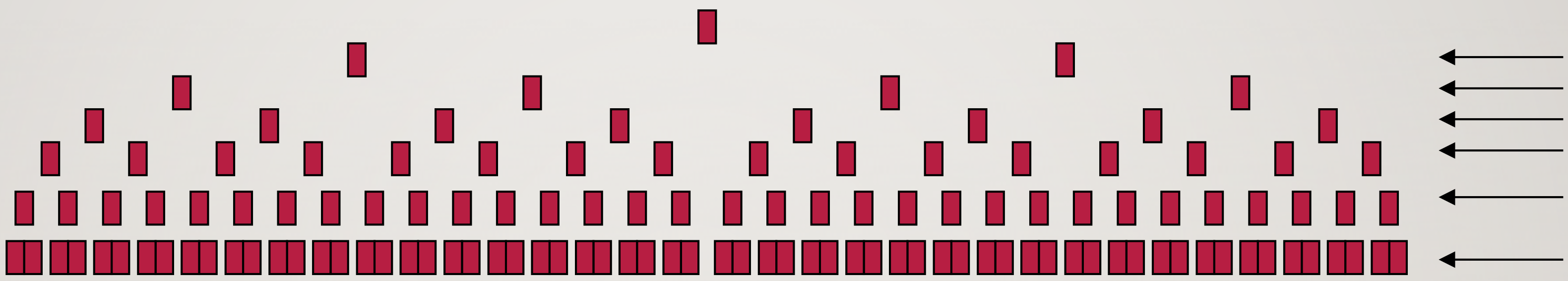
ÁRVORES

- Assuma que usaremos uma AVL para armazenar dados de motoristas (+/- 20 milhões de registros)
- Teríamos uma árvore bem alta (vários acessos a disco);
- $\log_2 20.000.000$ é +/- 24, o que consome +/- 0.2 segundos
- A solução é aumentar o número de ramificações na árvore diminuindo, assim, a altura!

ÁRVORES

- Árvores binárias são o caso extremo:
  - Fator mínimo de ramificação (2)
  - Máxima profundidade (muitos acessos)
- Se os acessos são caros (armaze-namento secundário), o desempenho cai…

ÁRVORES



Árvore binária com 127 nós em 7 níveis.

ÁRVORES

[illegible]

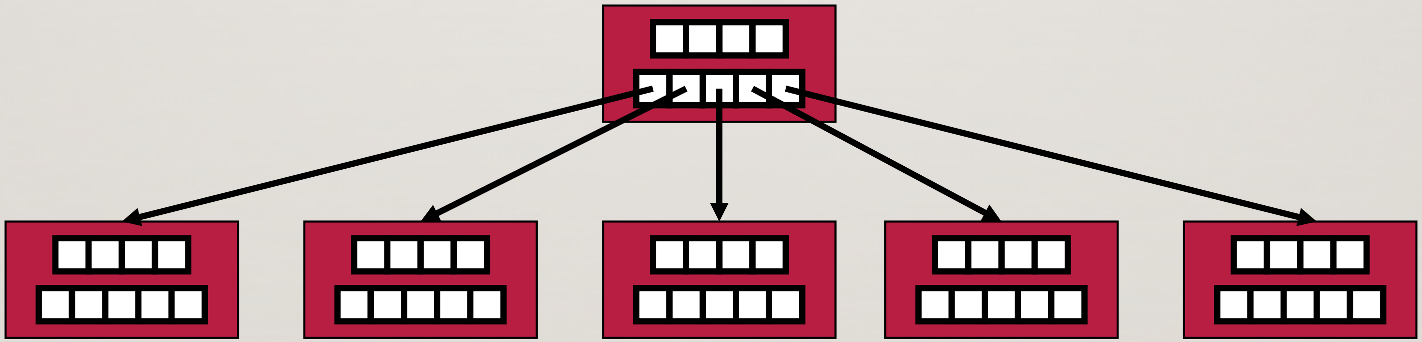
[illegible]

[illegible]

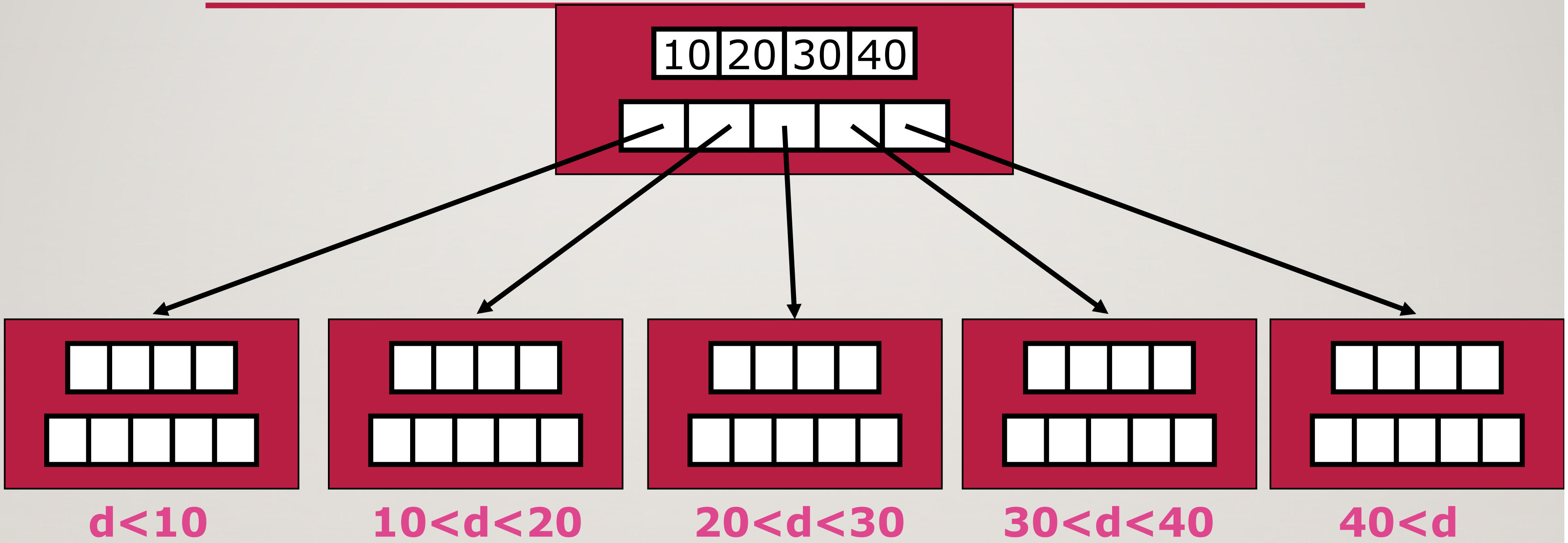
Árvore 10-aria com 127 nós em 3 níveis.

ÁRVORES N-ÁRIAS

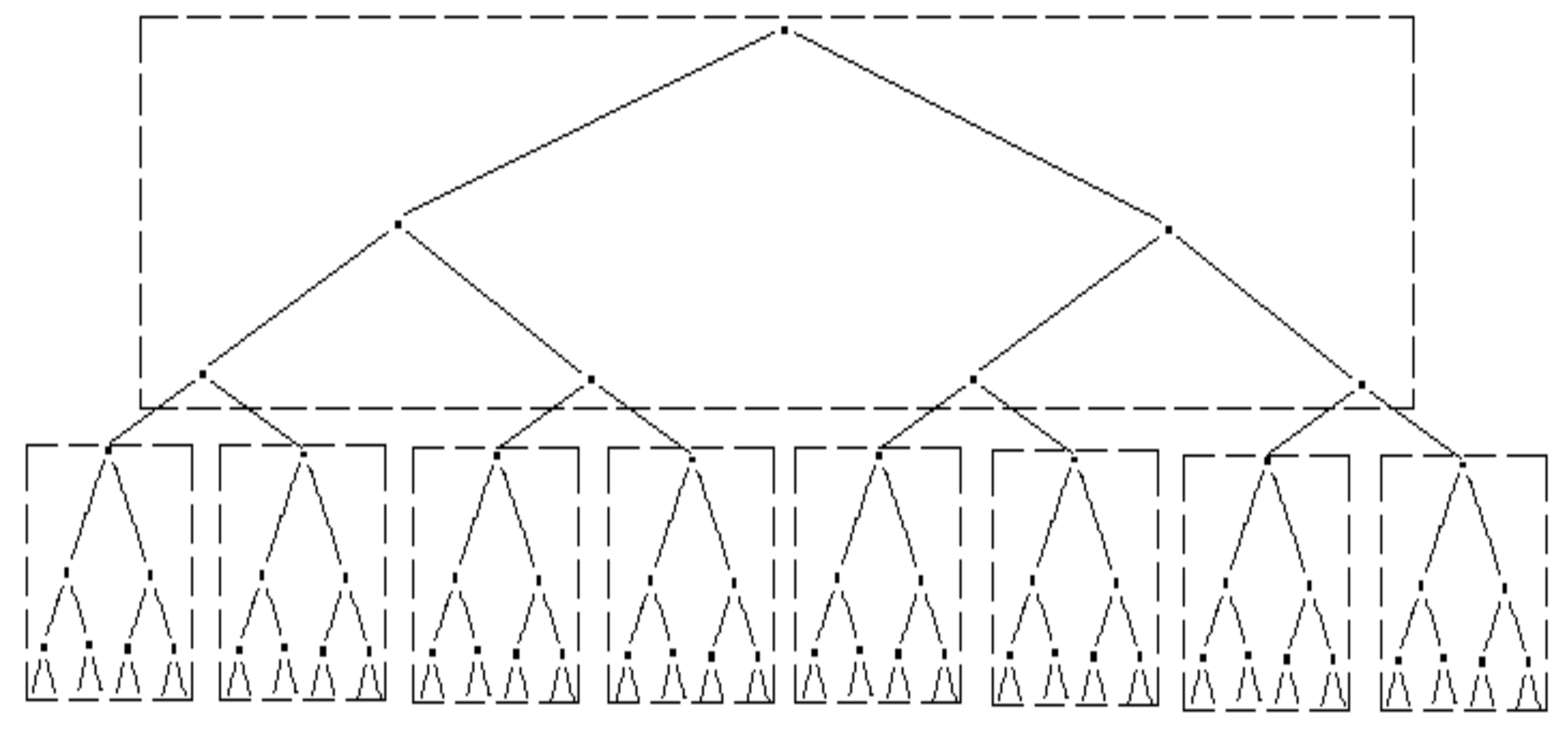
- n ponteiros
- n-1 chaves



ÁRVORES N-ÁRIAS



ÁRVORES (PAGED BINARY TREES)

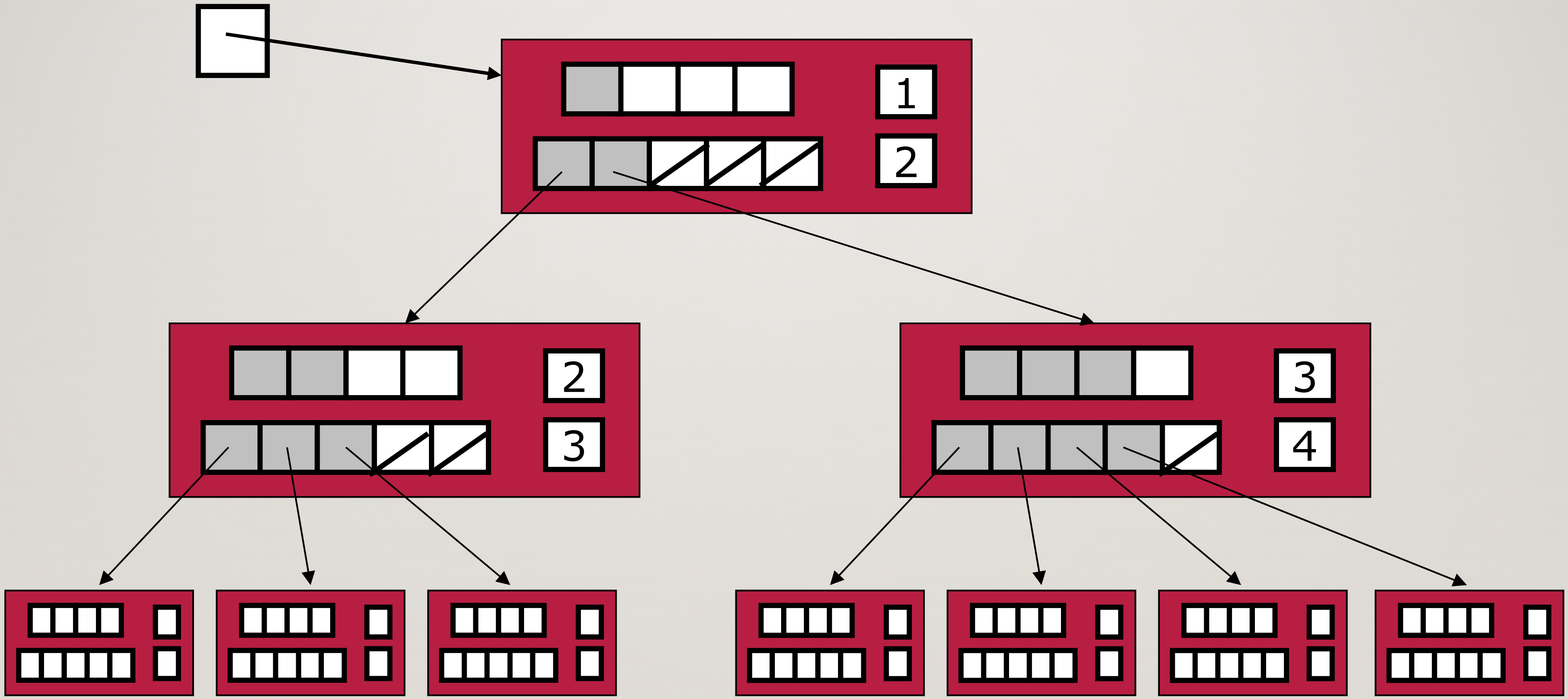


A divisão de uma árvore binária em páginas é ilustrada na figura acima. Nessa árvore de 9 páginas, quaisquer dos 63 registros pode ser acessado em, no máximo, 2 acessos.

ÁRVORE B

```
class NO_BTree
{
Private:
   Tipo         chave[20];
   NO_BTree     p[21];
   int          Qdade_chaves;
Public:
  métodos…
}
```

ÁRVORE B



ÁRVORE B

Uma árvore B de **ordem *m*** é uma árvore *m*-way (i.e., uma árvore onde cada nó pode ter até *m* filhos) e que:

1 .O número de chaves em cada nó não folha é um a menos que o número de filhos e cada filho está organizado no contexto de árvore de busca;

2. Todas as folhas estão no mesmo nível;

3. Todas as não-folhas - menos a raíz – têm no mínimo $\lceil m / 2 \rceil$ filhos;

4. A raíz ou é uma folha ou tem de 2 a *m* filhos;

5. Um nó folha não contém mais que $m – 1$ chaves;

6. O número *m* deve ser sempre ímpar;

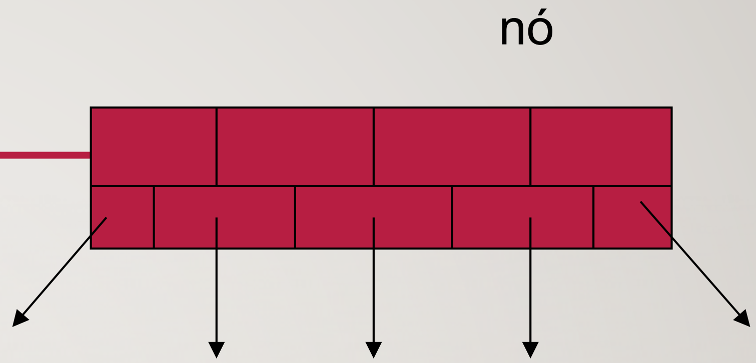
ÁRVORE B

- **Ordem**

A definição atual de **B-Tree** vincula a ordem de uma árvore B ao número de descententes de um nó (isto é, de ponteiros). Deste modo, numa árvore B de ordem **m**, o número máximo de chaves é m-1.

Exemplo:

Uma árvore B de ordem 8 tem um máximo de 7 chaves por página.

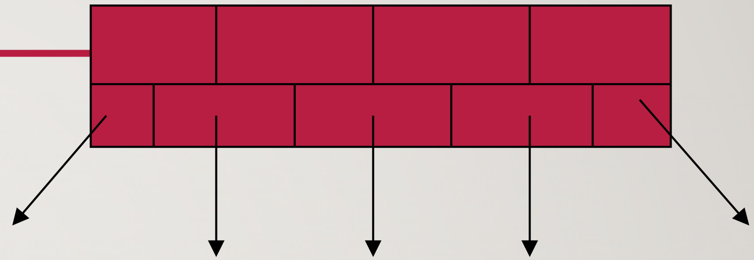


A árvore acima é de ordem 5.

ÁRVORE B

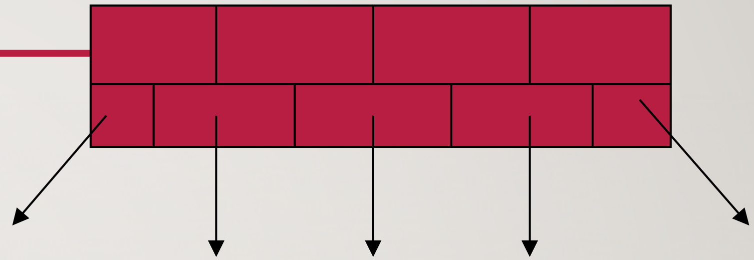
- **Número mínimo de chaves por página**

  Quando uma página é dividida na inserção (SPLIT), os nós são divididos igualmente entre as páginas velha e nova. Deste modo, o número mínimo de chaves em um nó é dado por m/2 - 1 (exceto para a raiz).



ÁRVORE B

- **Número mínimo de chaves por página**

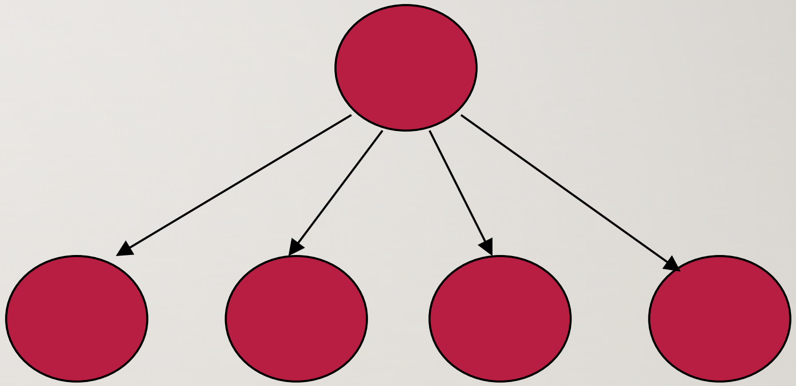


Exemplo: Uma árvore B de ordem 8 (que tem um máximo de 7 chaves por página) terá um mínimo de 3 chaves por página.

ÁRVORE B

- **Nó folha**

  Os nós folhas são aqueles alocados no nível mais baixo da árvore.



ÁRVORE B

- **Capacidade Máxima**

Nós com no máximo 1000 elementos:

- h 0: 1000
- h 1: 1000+1001*1000 = 1.002.000
- h 2: ~1 Bilhão

ÁRVORE B

- **Capacidade Mínima**

  (para árvore de 2 níveis)

Nós com no máximo 1000 elementos:

~500,000

(500*501*2 + 500*2 + 1)

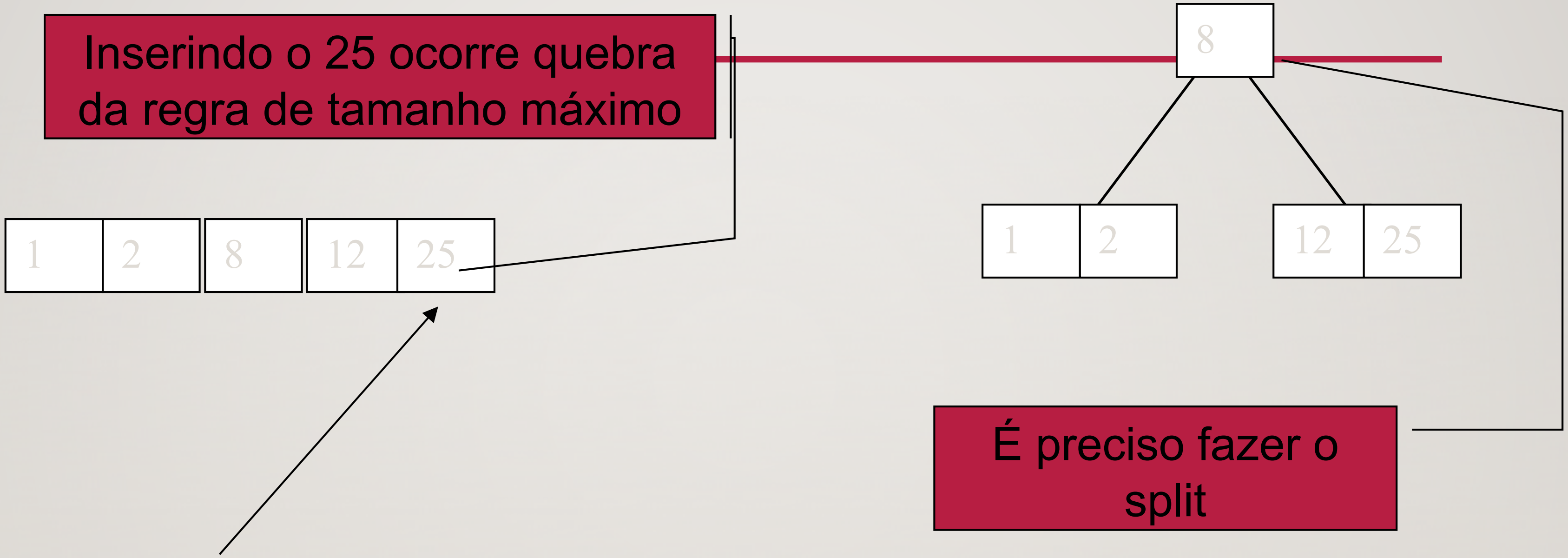
ÁRVORE B

- Suponha que iniciemos com uma árvore B vazia e as chaves devem ser inseridas na seguinte ordem: 1 12 8 2 25 6 14 28 17 7 52 16 48 68 3 26 29 53 55 45
- Queremos construir uma árvore B de ordem 5
- Os 4 primeiros elementos vão para a raíz:

1	2	8	12

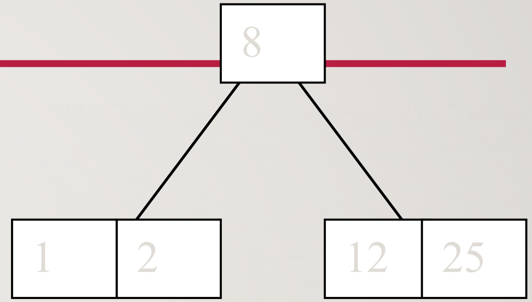
- O quinto elemento extrapola o tamanho do nó
- Assim, quando inserimos o 25 devemos dividir o nó em duas partes e colocar o elemento do meio como nova raiz

ÁRVORE B

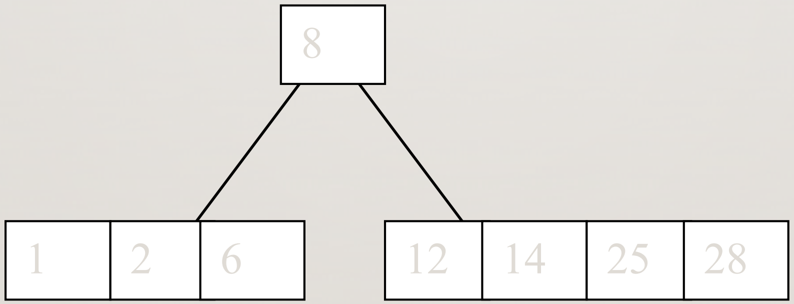


25 5 14 28 17 7 52 16 48 68 3 26 29 53 55 45

ÁRVORE B



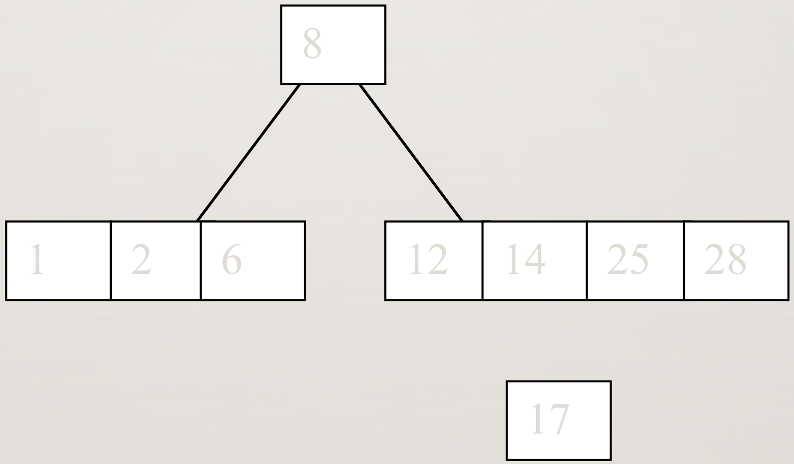
Em seguida colocamos 6, 14 e 28 :



6 14 28 17 7 52 16 48 68 3 26 29 53 55 45

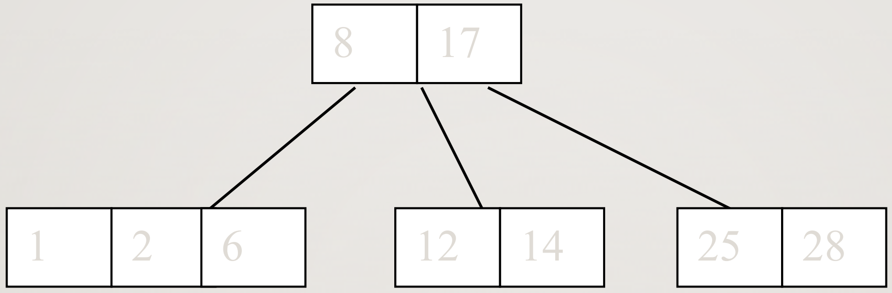
ÁRVORE B

Adicionando 17 à árvore teremos outro split…



17 7 52 16 48 68 3 26 29 53 55 45

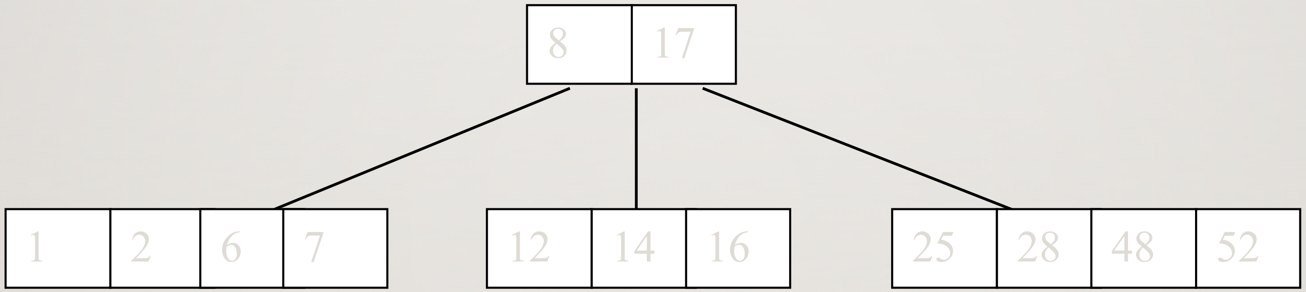
ÁRVORE B



17 7 52 16 48 68 3 26 29 53 55 45

ÁRVORE B

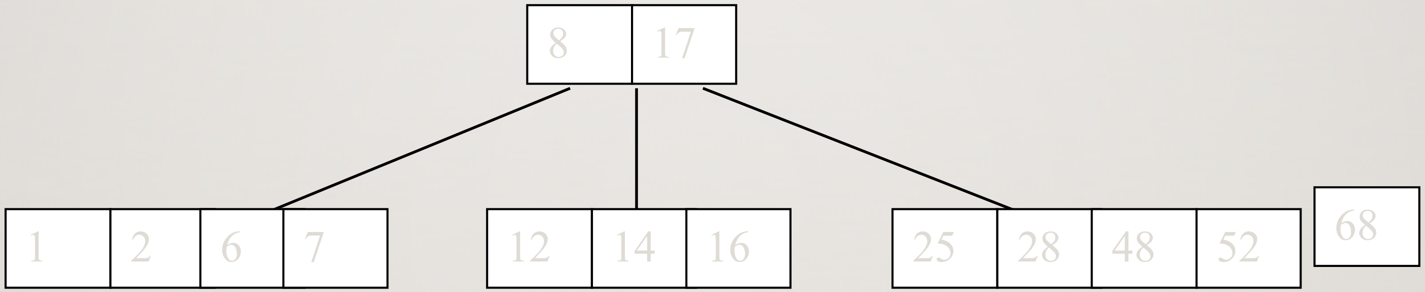
Continuando com 7, 52, 16 e 48



7 52 16 48 68 3 26 29 53 55 45

ÁRVORE B

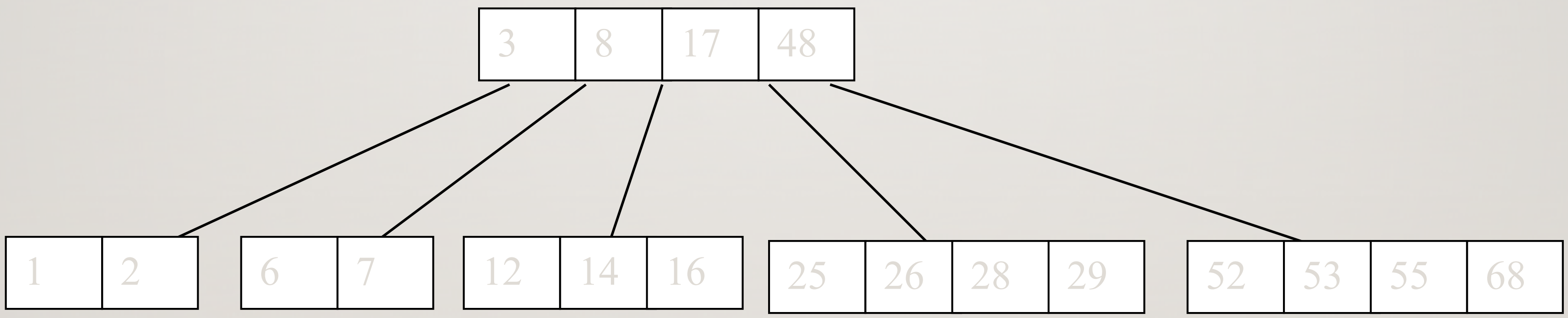
E agora, inserindo o 68…



68 3 26 29 53 55 45

ÁRVORE B

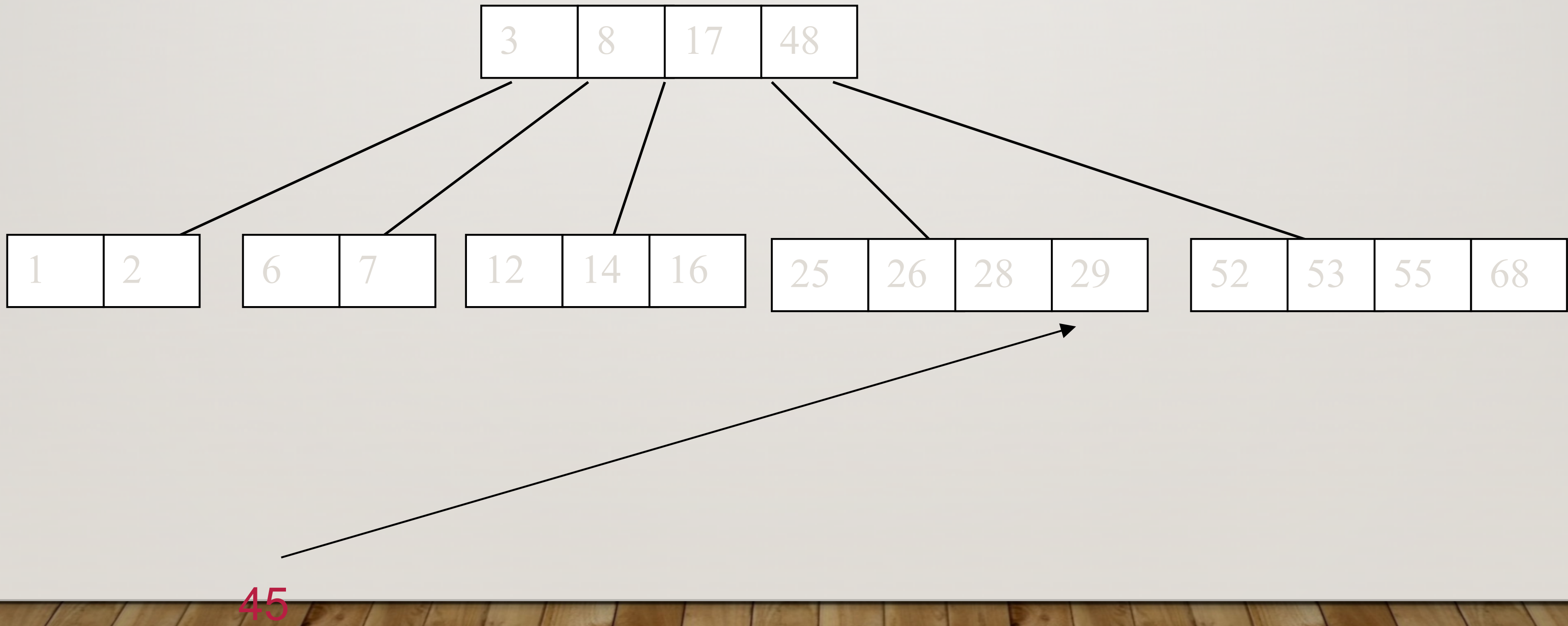
Adicionando 68 à árvore causa um “split” na folha mais à direita, fazendo com que o 48 suba à raiz. Quando inserimos o 3 o “split” é na folha mais à esquerda (o 3 sobe); 26, 29, 53, 55 vão para as folhas:



68 3 26 29 53 55 45

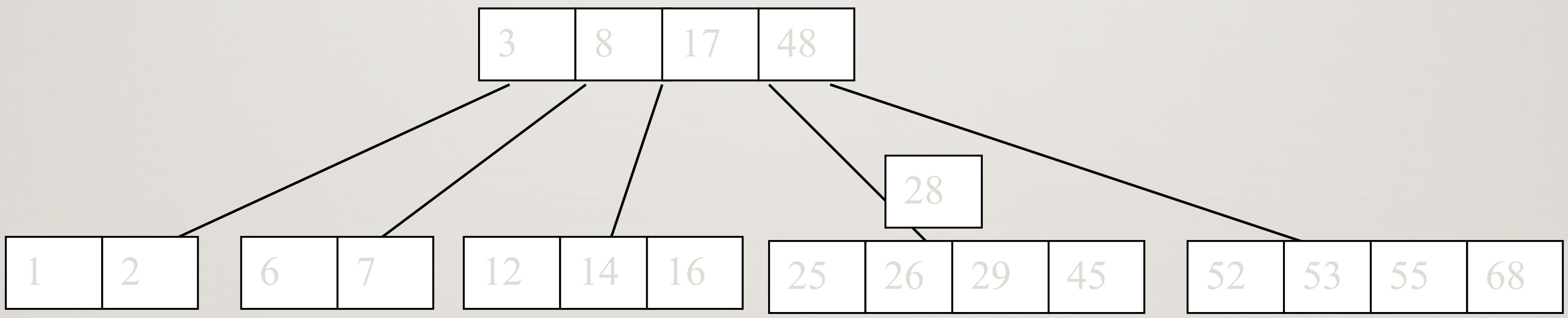
ÁRVORE B

Por fim o 45:



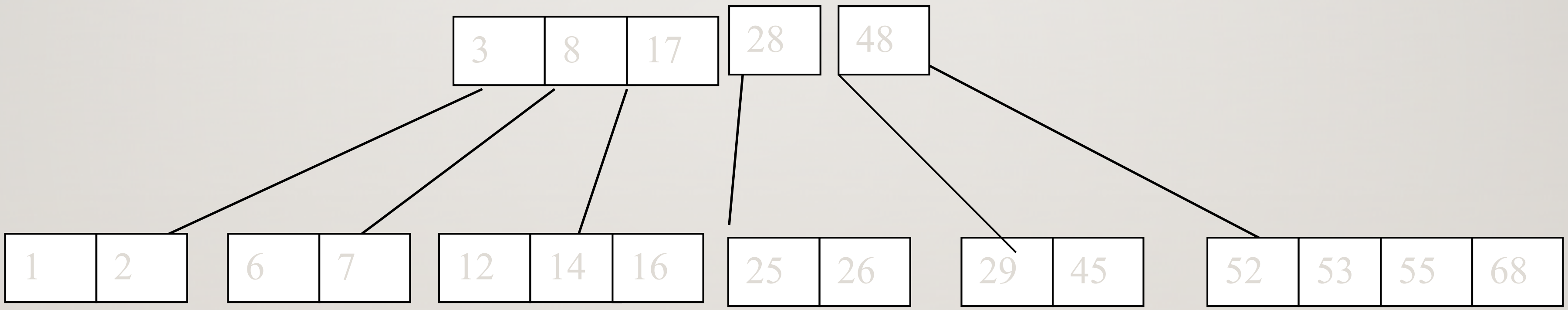
ÁRVORE B

Por fim, quando inserimos o 45, isso forçará com que o 28 suba para a raiz… Mas a raiz também está cheia !



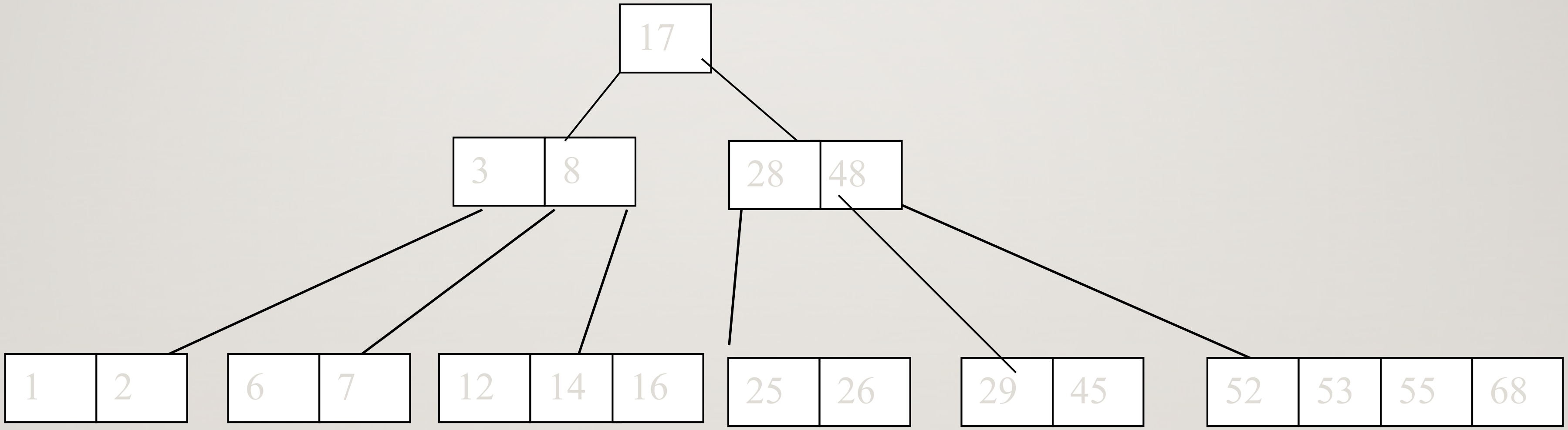
ÁRVORE B

Por fim, quando inserimos o 45, isso forçará com que o 28 suba para a raiz… Mas a raiz também está cheia !

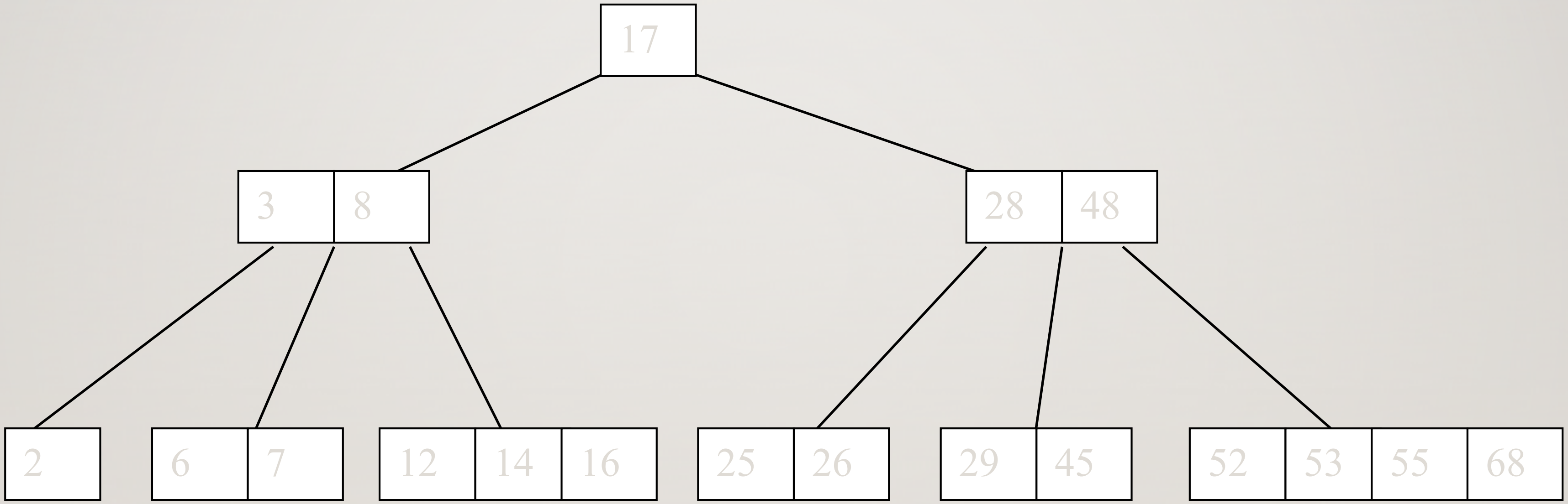


ÁRVORE B

O 17 tem que subir para se tornar a nova raiz… lembrem-se que a raiz pode ter um único elemento.



ÁRVORE B



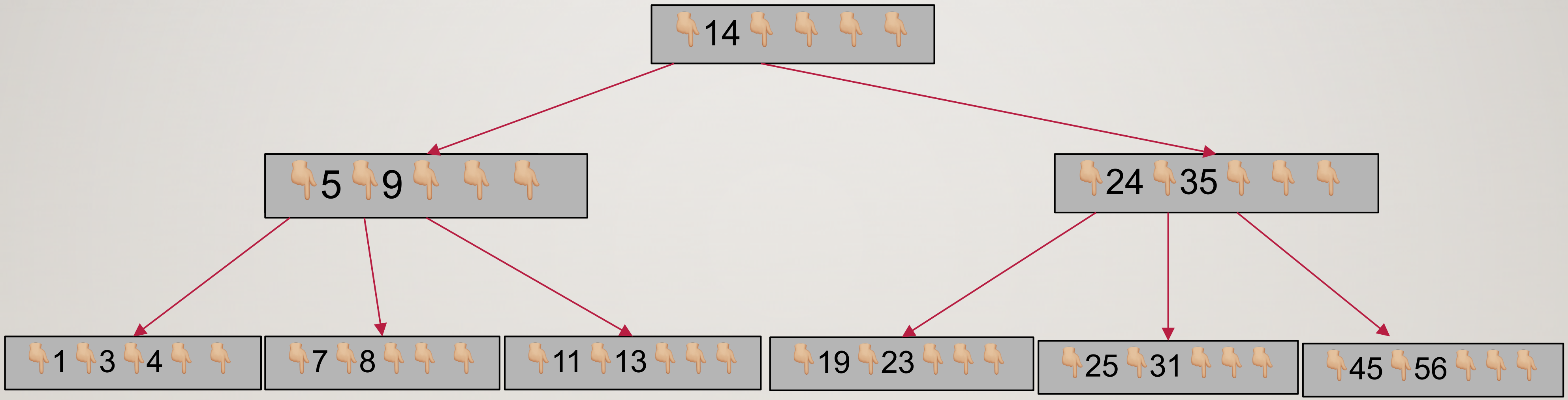
ÁRVORE B (INSERÇÃO)

- Tente inserir a nova chave em um nó folha (na posição adequada)
- Se isso fizer com que o nó fique cheio, divida a folha em duas partes e suba o elemento central para o nó pai;
- Se isso fizer com que o pai fique cheio repita o proces-so;
- A estratégia poderá ser repetida até o nó raiz;
- Se necessário o nó raiz deverá ser também divido e o elemento central será transformado em nova raiz (fazendo com que a árvore fique mais alta)

ÁRVORE B

- Insira os seguintes números em uma árvore B de ordem 5:
- 3, 7, 9, 23, 45, 1, 5, 14, 25, 24, 13, 11, 8, 19, 4, 31, 35, 56

ÁRVORE B



ÁRVORE B (REMOÇÃO)

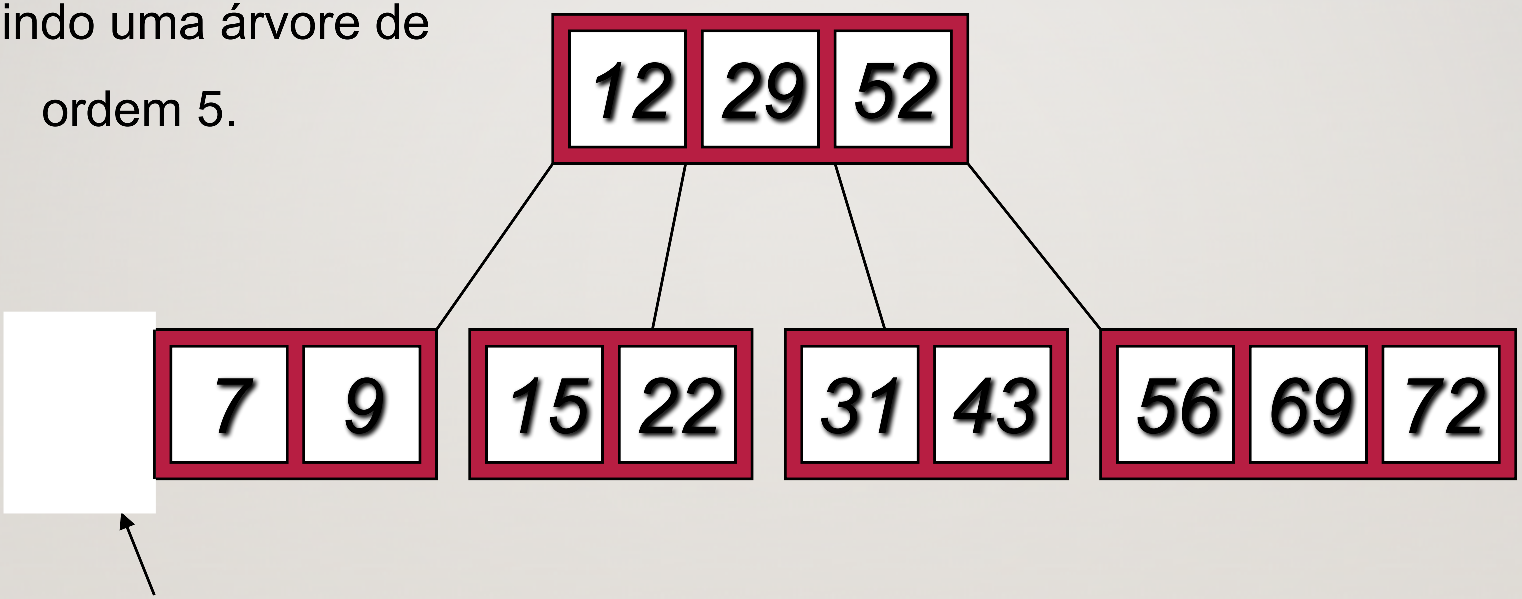
- Durante a inserção, a chave sempre vai para a folha. Na remoção desejamos remover da folha. Assim, temos 3 possibilidades:
- 1 – Se a chave já está em um nó folha e sua remoção não faz com que o nó fique com poucos elementos (menos que $\lceil m / 2 \rceil$ filhos), então apenas elimine-a.
- 2 – Se a chave não é folha, então é garantido que seu predecessor ou sucessor esteja em um nó folha – e neste caso podemos eliminar a chave e subir o predecessor ou sucessor para a posição ocupada pela chave eliminada.

ÁRVORE B (REMOÇÃO)

- Se (1) ou (2) ocasionam uma folha a ter um número menor que o mínimo então temos que observar os irmãos adjacentes ao nó em questão :
  - 3: Se um deles tem número de chaves maior que o mínimo então pode-se subir uma chave deste nó para o nó pai e pegar a chave do nó pai para a posição da chave eliminada;
  - 4: Se ambos irmãos não têm número de chaves maior que o mínimo, então suas chaves devem ser combinadas com a chave do nó pai. Se este passo fizer com que o nó pai fique com menos chaves que o permitido o processo deve ser repetido até o nó raiz (se necessário).

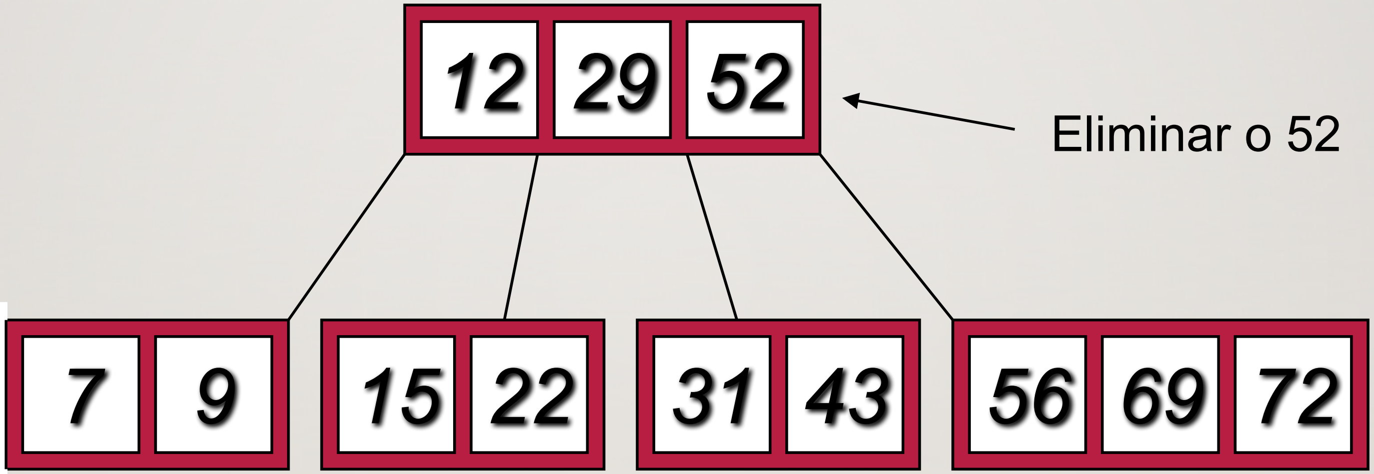
ÁRVORE B – (REMOÇÃO – CASO 1)

Assumindo uma árvore de ordem 5.

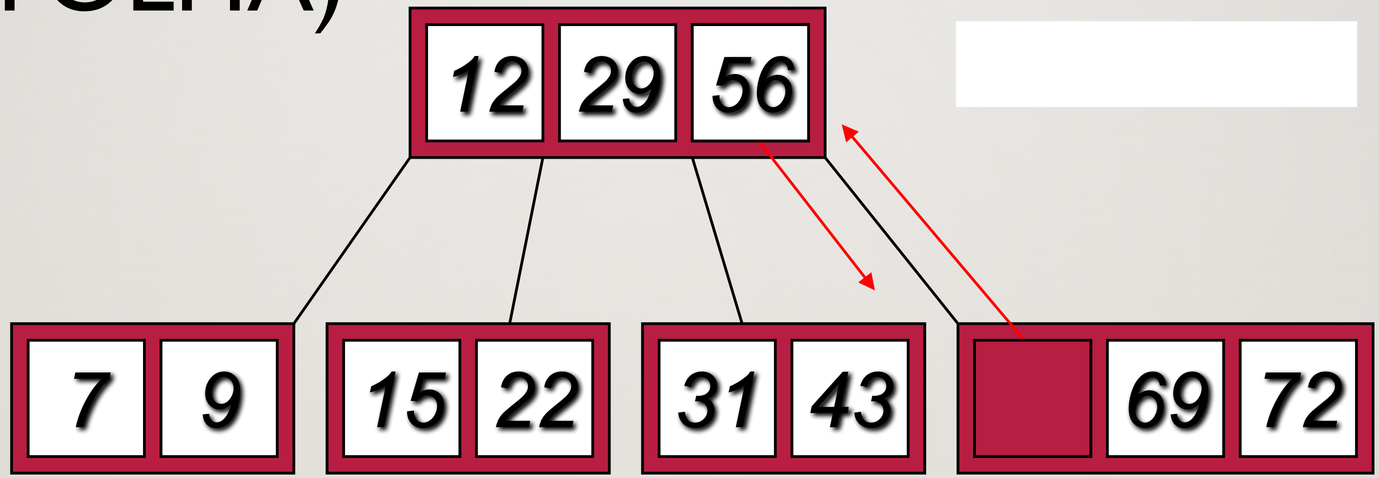


Eliminar o 2: Há chaves suficientes

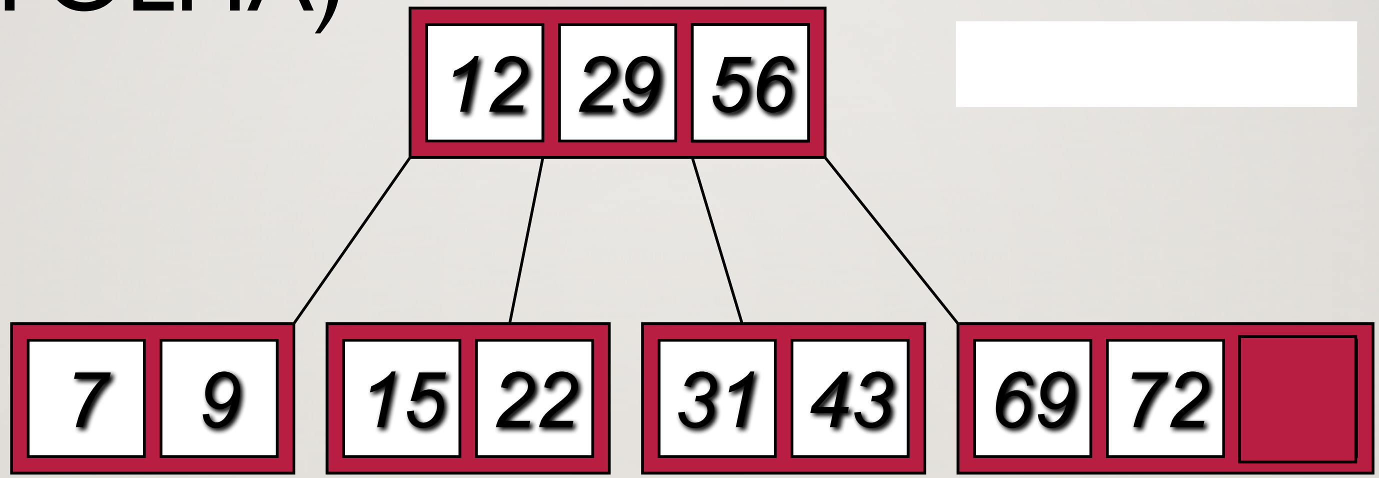
ÁRVORE B (REMOÇÃO – CASO 1)



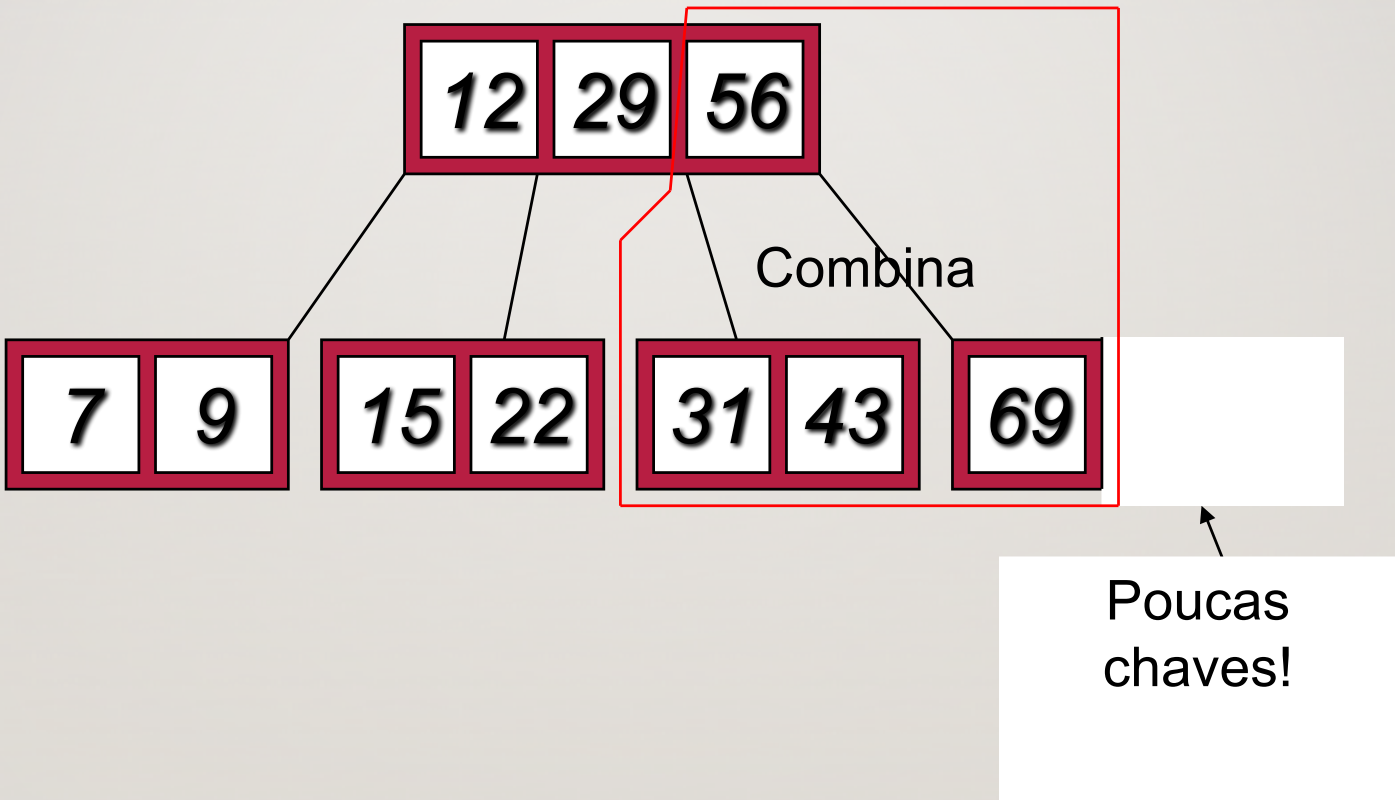
ÁRVORE B (REMOÇÃO DE NÓ NÃO FOLHA)



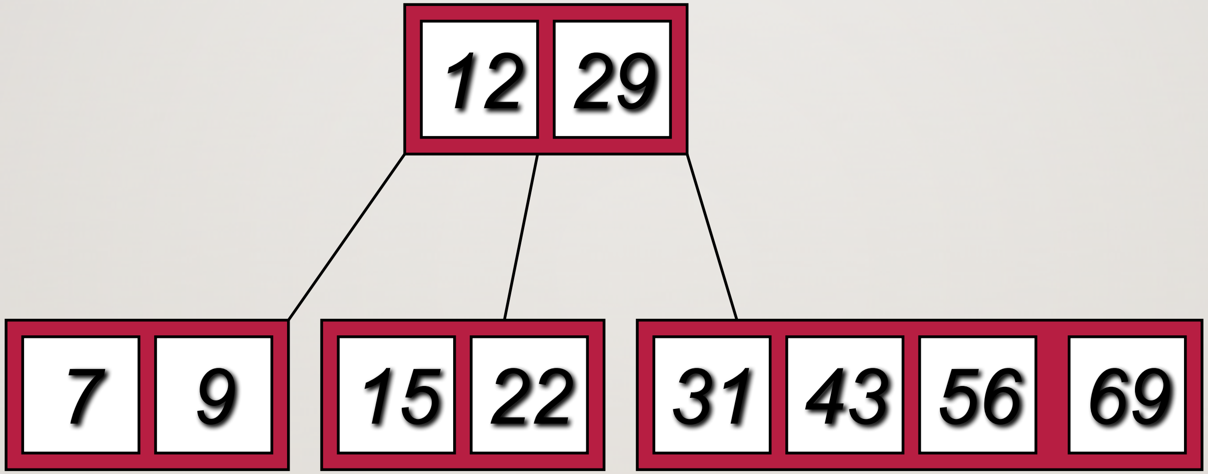
ÁRVORE B (REMOÇÃO DE NÓ NÃO FOLHA)



ÁRVORE B (REMOÇÃO - POUCAS CHAVES NOS NÓS IRMÃOS)

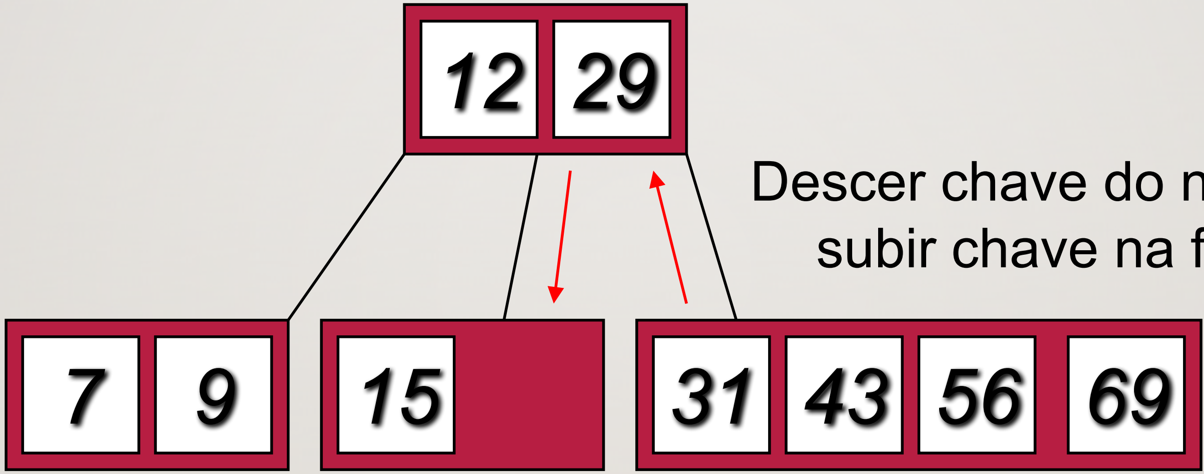


ÁRVORE B (REMOÇÃO - POUCAS CHAVES NOS NÓS IRMÃOS)



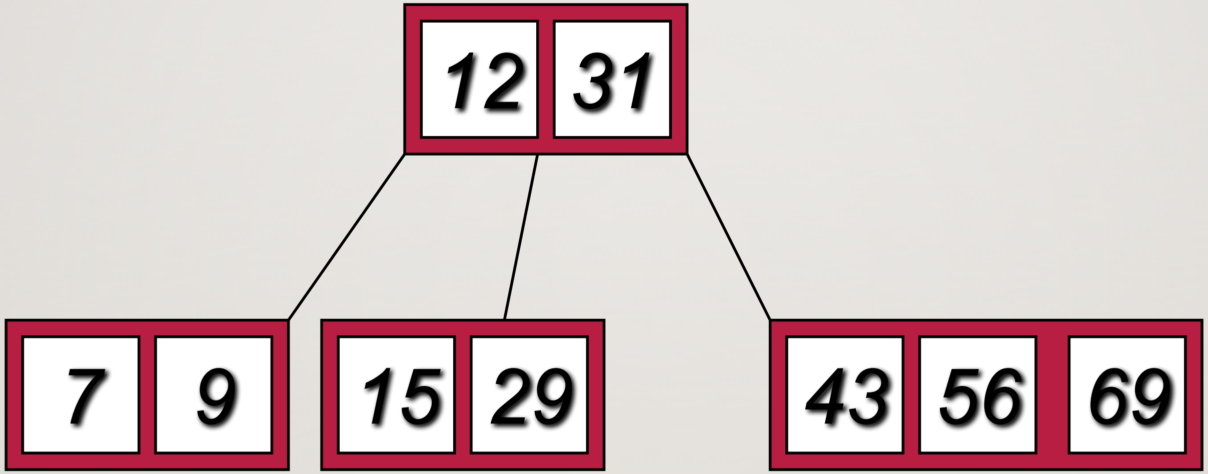
Eliminar o 22

ÁRVORE B
(REMOÇÃO - IRMÃO OK)



Descer chave do nó pai e subir chave na folha

ÁRVORE B
(REMOÇÃO - IRMÃO OK)



ANÁLISE DE ÁRVORE B

- O número máximo de elementos em uma árvore B de ordem m e altura h é:

raiz	$m - 1$
nivel 1	$m(m - 1)$
nivel 2	$m^2(m - 1)$
. . .	
nivel h	$m^h(m - 1)$

- Assim, o total de elementos é

$$(1 + m + m^2 + m^3 + \ldots + m^h)(m - 1) =$$
$$[(m^{h+1} - 1)/ (m - 1)]\ (m - 1) = \mathbf{m^{h+1} - 1}$$

- Quando $m = 5$ e $h = 2$ temos $5^3 - 1 = 124$

RAZÕES PARA USAR ÁRVORES B

- Na busca de dados no disco, o custo de cada acesso é alto (mas não depende muito do tempo de transferência do dado – principalmente se forem consecutivos)
  - Se usarmos uma árvore B de ordem 101 podemos transferir cada nó para a memória primária com um acesso a disco
  - Uma árvore B de ordem 101 e altura 3 pode armazenar (101^4 – 1) chaves (aproximadamente 100 milhões) e qualquer elemento pode ser acessado com no máximo 3 operações de leitura (assumindo que a raiz permanece na memória)
- Se tomarmos *m* = 3, temos uma árvore **2-3**, na qual um nó não folha tem 2 ou 3 filhos