

Universidade Federal de Pelotas - UFPEL
CENTRO DE DESENVOLVIMENTO
TECNOLÓGICO

Árvore Geradora Mínima – MST (Minimum Spanning Trees)

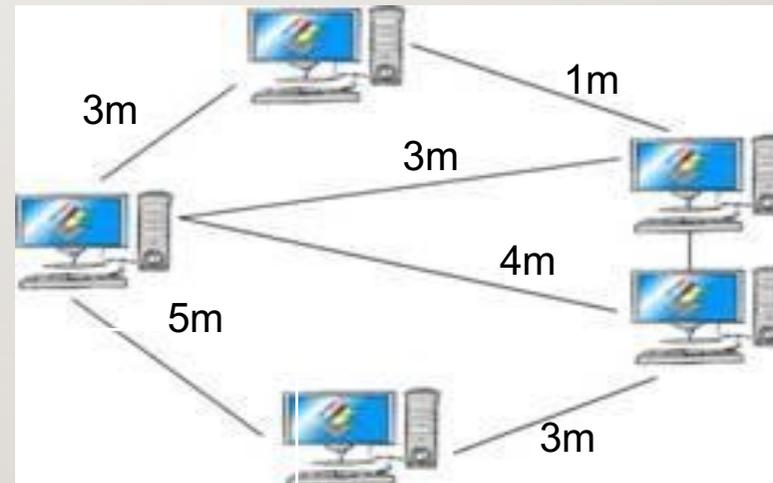
Prof. Guilherme Netto



ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

Considere o seguinte problema:

Dado um conjunto de computadores, onde cada par de computadores pode ser ligado utilizando-se uma quantidade de cabo de rede, encontrar uma rede que interconecte todos os computadores utilizando uma quantidade mínima de cabeamento.

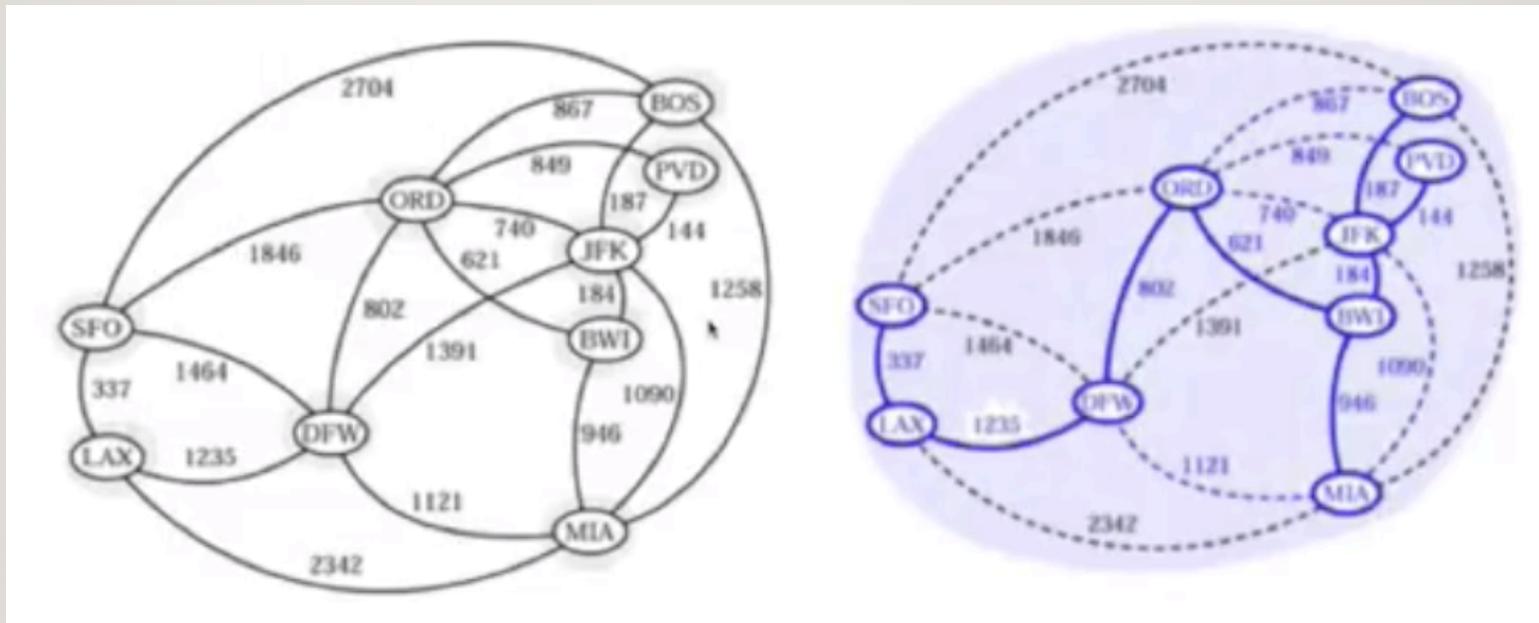




ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

- Novas rotas de vôos de uma companhia aérea
 - Como customizar os recursos (aviões, tripulação, etc)
 - Atender toda demanda aérea
 - Programar conexões
- 

ÁRVORE GERADORA MÍNIMA





Árvore Geradora Mínima

- Transporte Aéreo
 - Transporte Terrestre
 - Redes de computadores
 - Linhas de transmissão elétricas
 - Circuitos integrados,
 - etc
- 



ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

- Também chamado de:
 - Árvore Geradora mínima(AGM)
 - Árvores de Cobertura mínima
 - Árvores de Expansão mínima
 - Árvores de amplitude Mínima
 - Minimum Spanning Tree (MST)



ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

Este problema pode ser modelado em grafos não orientados ponderados onde os vértices representam os computadores, as arestas representam as conexões que podem ser construídas e o peso/custo de uma aresta representa a quantidade de cabo necessário.

Nessa modelagem, o problema que queremos resolver é encontrar um **subgrafo gerador** (que contem todos os vértices do grafo original), **conexo** (para garantir a interligação de todas os computadores) e cuja soma dos custos de suas arestas seja a menor possível.



ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

- Observações:
- Obviamente, o problema só terá solução se o grafo for conexo, ponderado e não-orientado.
- O Subgrafo gerado será sempre uma árvore.
 - Lembrando:
 - “uma árvore é um grafo conexo (existe caminho entre quaisquer dois de seus vértices) e acíclico (não possui ciclos)”

Árvore Geradora Mínima

Problema da Árvore Geradora Mínima

Entrada: grafo conexo $G = (V, E)$ com pesos $w(u, v)$ para cada aresta (u, v) .

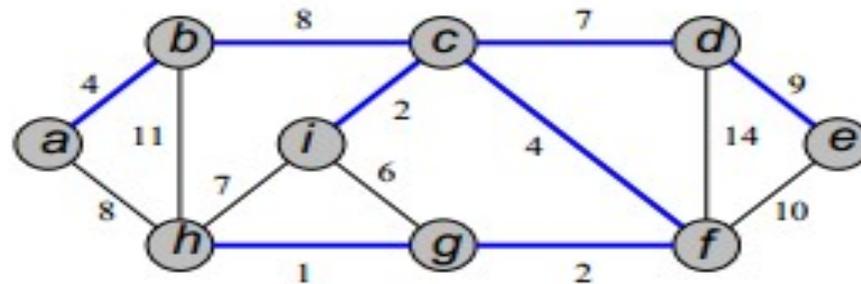
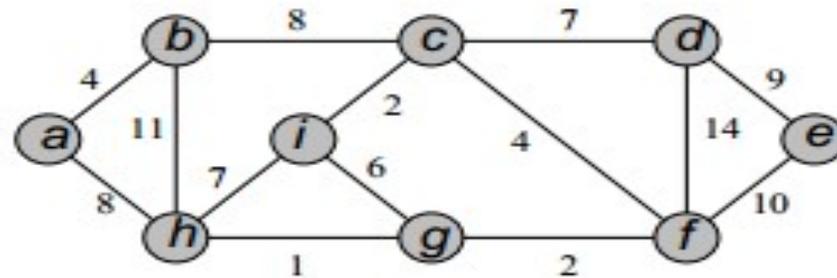
Saída: subgrafo gerador conexo T de G cujo peso total

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in T} w(u, v)$$

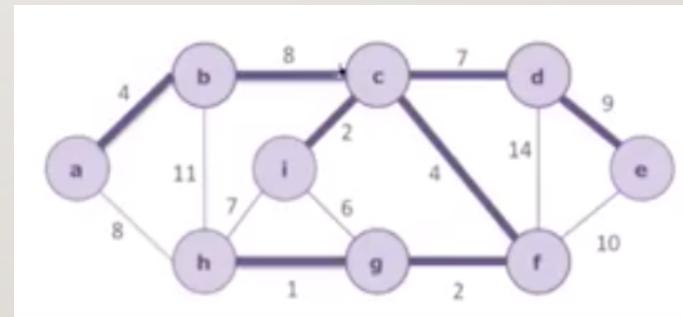
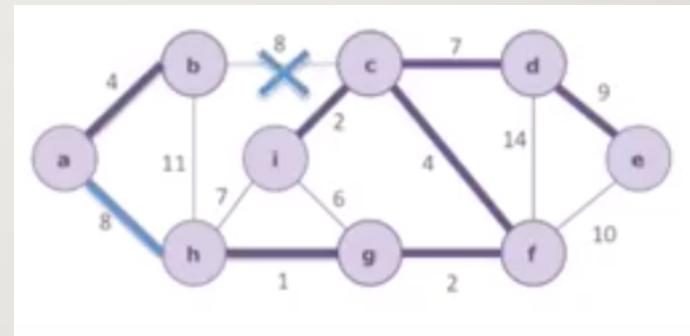
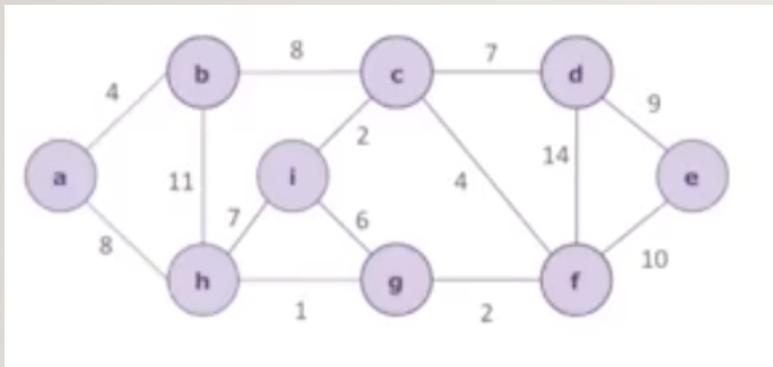
seja o menor possível.

Árvore Geradora Mínima

Exemplo

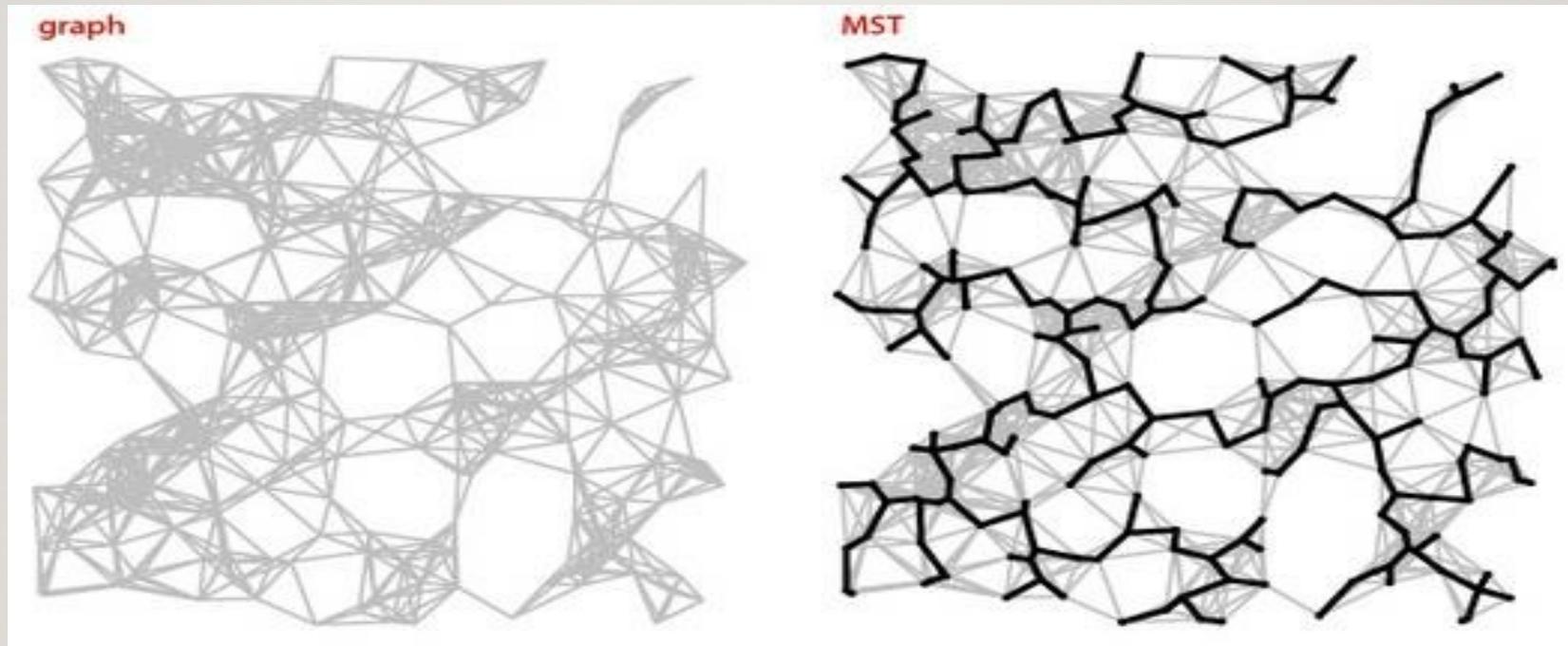


ÁRVORE GERADORA MÍNIMA



Árvore Geradora Mínima

Exemplo 2





ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

Algoritmo Genérico

- Constrói-se um conjunto de arestas A , que é um subconjunto da MST do grafo G .
- Inicialmente A não contém arestas.
- A cada passo, determina-se a aresta (u,v) que pode ser adicionada a A de modo que $A \cup \{(u,v)\}$ seja também um subconjunto de uma MST do grafo G .
- A aresta (u,v) é chamada de aresta segura para A .

Árvore Geradora Mínima

Algoritmo Genérico

AGM-GENÉRICO(G, w)

1 $A \leftarrow \emptyset$

2 **enquanto** A não é uma árvore geradora

3 Encontre uma aresta (u, v) segura para A

4 $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$

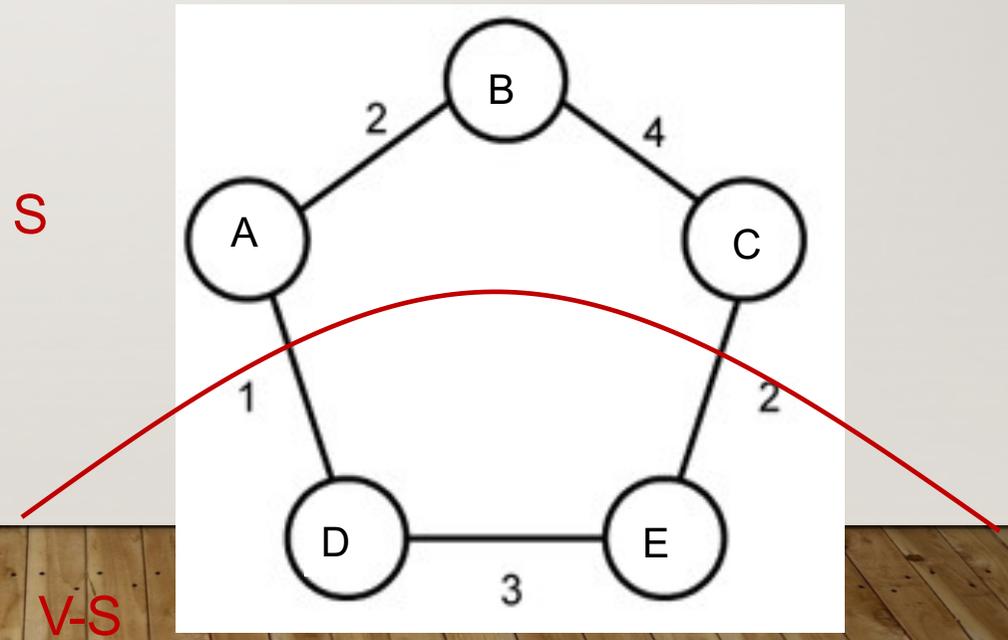
5 **devolva** A

ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

Conceitos Básicos

Como encontrar uma aresta segura?

O que é um corte em um grafo?



ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

Conceitos Básicos

Como encontrar uma aresta segura?

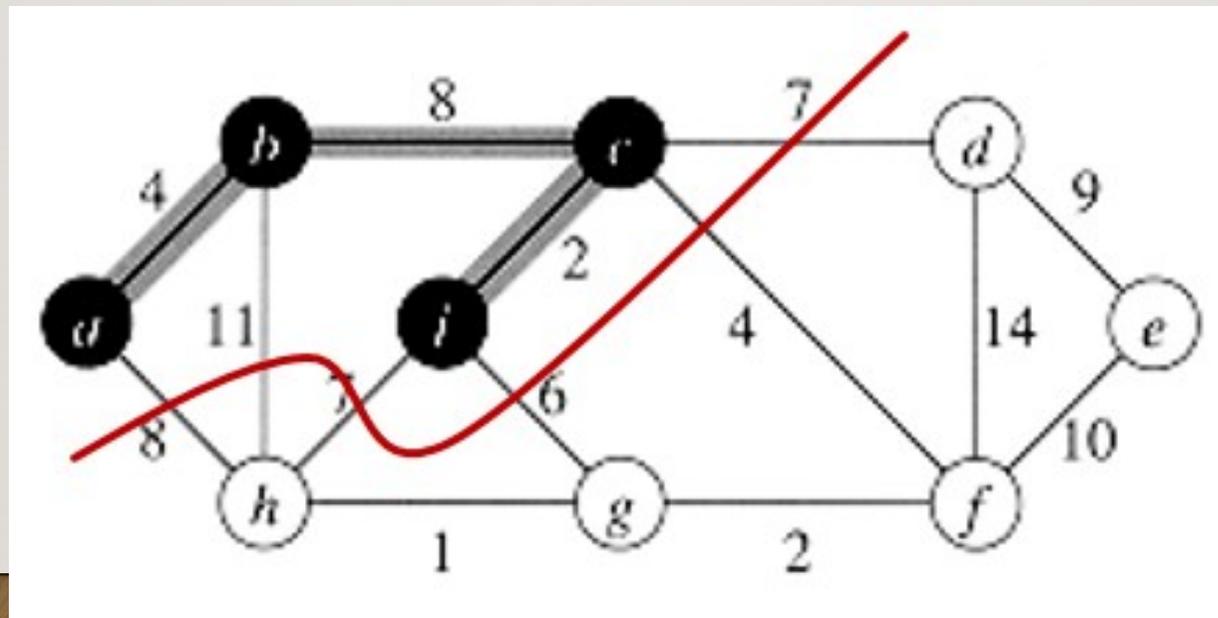
Definições:

- Um corte $(S, V-S)$ de um grafo não-dirigido $G=(V,E)$ é uma partição de V .
- Uma aresta $(u,v) \in E$ cruza o corte $(S, V-S)$ se um de seus pontos finais está em S , e o outro em $V-S$.
- Um corte respeita o conjunto A se nenhuma aresta de A cruza o corte.
- Um aresta é a **aresta mais leve** se o seu peso é o mínimo entre os pesos das arestas que cruzam o corte.

ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

Conceitos Básicos

Como encontrar uma aresta segura?



ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

a) Encontre uma mst no grafo descrito a seguir.

0-6	0-1	0-2	4-3	5-3	7-4	5-4	0-5	6-4	7-0	7-6	7-1
51	32	29	34	18	46	40	60	51	31	25	21

b) Mostre que um grafo conexo com custos nas arestas pode ter mais de uma mst. (Por isso dizemos uma mst e não a mst.)

c) Descreva um exemplo prático onde uma MST poderia ser uma solução viável para resolução do problema

d) Qual o peso da árvore geradora mínima e máxima que representa o grafo ilustrado na figura abaixo? O peso é a soma dos valores das arestas da árvore resultante. Desenhe a árvore resultante para justificar sua resposta

